

МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ № 2 (821)

ИЗДАЕТСЯ С 1992 г.

ТЕМА НОМЕРА

ОБУЧАЕМ МАТЕМАТИКЕ
ДЕТЕЙ С ОВЗ



МЕТОДИЧЕСКИЙ СЕМИНАР

ОБ УСЛОВНОЙ
ВЕРОЯТНОСТИ В ШКОЛЕ
С. 12

МЕТОДИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ

НЕСКОЛЬКО КРАСИВЫХ
ЗАДАЧ НА ТЕОРЕМУ ВЬЕТА
С. 22

ДОКУМЕНТЫ МИНПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИИ

ОБ УТВЕРЖДЕНИИ ФЕДЕРАЛЬНОГО
ПЕРЕЧНЯ УЧЕБНИКОВ
С. 54

РАДИОАКТИВНАЯ ОПАСНОСТЬ С. 64

ИЗДАВАННОЕ И ИЛЛЮСТРИРОВАННОЕ

Методический журнал
для учителей математики
Издаётся с 1992 г.
Выходит 10 раз в год

Издательство МЦНМО
БОЛЬШОЙ ВЛАСЬЕВСКИЙ ПЕР., 11,
МОСКВА, 119002

Издаётся совместно с
РОССИЙСКОЙ АССОЦИАЦИЕЙ
УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
Страничка журнала на сайте RAUM:
raum.math.ru/node/179

РЕДАКЦИЯ:
Главный редактор: Л. РОСЛОВА
Ответственный секретарь:
Т. ЧЕРКАВСКАЯ
Редакторы: П. КАМАЕВ,
О. МАКАРОВА
Корректор: Л. ГРОМОВА
Верстка: Л. КУКУШКИНА
Дизайн обложки: Э. ЛУРЬЕ
Дизайн макета: И. ЛУКЬЯНОВ

8 (499) 241-89-79
mat@mccme.ru
mat@1september.ru

По вопросам распространения
обращаться по телефону (499) 745-80-31
e-mail: biblio@mccme.ru

Иллюстрации: freepik.com

Зарегистрировано ПИ №ФС77-66437
от 14.07.16 в Роскомнадзоре

Подписано в печать: 28.02.2021
Тираж: 3000 экз.
Для получения доступа
к журналу «Математика»
в электронном виде
необходима регистрация
школы в системе «СтатГрад».
Подробнее см. на сайте
statgrad.org/#2619
ISSN 2658-4042

Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8,
тел. +7 (831) 216-40-40.
Номер заказа

В НОМЕРЕ

4 ЮБИЛЕЙ
А. Шевкин
Потапову Михаилу Константиновичу 90 лет!

9 НА УРОКЕ / ОТКРЫТЫЙ УРОК
Г. Аджемян, А. Грищенко
«Шефский урок» для детей с ОВЗ

10 НА УРОКЕ / ДИДАКТИЧЕСКОЕ СОПРОВОЖДЕНИЕ
Т. Литвиненко
Карточки-подсказки на уроках геометрии

12 МЕТОДОБЪЕДИНЕНИЕ / МЕТОДИЧЕСКИЙ СЕМИНАР
И. Высоцкий, В. Шапарина
Об условной вероятности в школе

22 МЕТОДОБЪЕДИНЕНИЕ / МЕТОДИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ
Е. Михайлов
Несколько красивых задач на теорему Виета

30 Г. Левитас
Задача-шарада

32 Е. Иванова
Координатный метод в планиметрии

34 А. Шевкин
Возьмем интеграл или... ножницы

 35 МЕТОДОБЪЕДИНЕНИЕ / МЕТОДИЧЕСКАЯ КОНСУЛЬТАЦИЯ
А. Волкова
Геометрическое оригами, или Опыты с бумагой

42 МЕТОДОБЪЕДИНЕНИЕ / ТЕХНОЛОГИИ / ИКТ
Л. Рослова
Международный опыт обучения математике
с использованием цифровых технологий

51 ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ
В. Пырков
К 110-летию юбилею М.В. Келдыша

54 В УЧИТЕЛЬСКОЙ / НОРМАТИВНЫЕ ДОКУМЕНТЫ
Об утверждении федерального перечня учебников

 63 ПОСЛЕ УРОКА / В КЛАДОВОЙ ГОЛОВОЛОМОК
Н. Авилов
«Стрелка Юноны»

64 В КАБИНЕТЕ МАТЕМАТИКИ / НА СТЕНД
Знаки и эмблемы / Радиация

 К статьям, обозначенным этим символом, есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

ЮБИЛЕЙ М.К. ПОТАПОВА

Л. РОСЛОВА

■ Я не могу похвастаться длительным общением с Михаилом Константиновичем Потаповым, но я помню, с каким вниманием и наслаждением слушали учителя его лекции на днях учителя математики, проходивших в рамках Педагогического марафона, который на протяжении нескольких лет организовывал издательский дом «Первое сентября». У меня сохранились фотографии одного из выступлений в 2006 году, по фото вижу, что проходило оно в Московском доме учителя. Умение без спешки, логично, с акцентами, необходимыми для понимания слушателями, объяснить решение задачи или обосновать принятый в учебнике методический подход идет от большой методической культуры и огромного преподавательского опыта.

У меня нет опыта совместной работы над учебным пособием, но однажды я пересеклась с Михаилом Константиновичем в работе над книгой, будучи редактором в издательстве «Дрофа». Он принес нам замечательный сборник старинных задач, почерпнутых из математических книг XVIII века, от начала века и «Арифметики» Магницкого до конца века и задач, связанных с именем Эйлера: *Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В., Потапов М.К. Старинные занимательные задачи*. — М.: Дрофа, 2002. Молодым художникам, которым было поручено художественное оформление книги, так понравились и сами задачи («Почему мы не решали такое в школе», — задавали они мне вопрос), и исторический контекст (от Петровской эпохи к Екатерининскому золотому веку), что им захотелось сделать что-то необычное, интересное и с точки зрения общего дизайна книги. Увидев предыдущие издания сборника, они не пожелали ограничиваться традиционным для математических задачникчиков размещением по страницам задач и решений к ним.

Развернутый перед Михаилом Константиновичем макет будущей книги так поразил его, что он предложил ребятам организовать визит в научную библиотеку МГУ, где хранится один из сохранившихся первых экземпляров «Арифметики» Магницкого. Жалею, что не пошла вместе с ними: на художников книга произвела колоссальное впечатление. Не только взглянуть на эти страницы, но и прикоснуться к ним — это стало и потрясением, и своеобразной передачей культурного кода. За такое событие в их профессиональной жизни они были чрезвычайно признательны Михаилу Константиновичу и потом всегда говорили, что лучшие авторы — это математики.

Я думаю, что со стороны Михаила Константиновича это был отклик настоящего Учителя, который осознает свою ответственность за передачу культурного наследия будущим поколениям и верен этой миссии.



А. ШЕВКИН,
г. Москва



ПОТАПОВУ МИХАИЛУ КОНСТАНТИНОВИЧУ 90 ЛЕТ!

■ Михаил Константинович Потапов родился 29 января 1931 г. в городе Пятигорске Ставропольского края. Окончил Пятигорский государственный педагогический институт (1952), кандидат физико-математических наук (1956), доктор физико-математических наук (1974), профессор (1975), профессор кафедры высшей геометрии и топологии (1956–1978), профессор кафедры теории функций и функционального анализа (1978 — по настоящее время) механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Награжден медалью «Ветеран труда» (1975). Лауреат премии им. М.В. Ломоносова за педагогическую деятельность (2000). Заслуженный профессор Московского университета (1999). Заслуженный деятель науки РФ (1993). Отличник народного образования.

Область научных интересов: теория функций, школьное образование. Тема кандидатской диссертации: «Некоторые вопросы наилучшего приближения в метрике L_p ». Тема докторской диссертации: «Конструктивные характеристики и теоремы вложения для некоторых классов функций». Читает курсы «Мера и интеграл», «Приложения теории функций и функционального анализа», «Приближение функций полиномами», «Тригонометрические ряды», «Номография», «Научные основы школьного курса математики», «Математические основы школьного курса естествознания», «Содержание и методика преподавания школьного курса математики».

Школьные учителя знают Михаила Константиновича начиная с его первой, широко известной книги: *Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х. Пособие по математике. Для поступающих в вузы. Избранные вопросы элементарной математики.* — М.: Наука, 1968.

С этой книгой у меня связаны личные воспоминания: я пользовался ею, обучаясь в 10 «Е» классе СШИ ФМП № 18 при МГУ им. М.В. Ломоносова. Ее мне подарил одноклассник Боря Ужакин. Книга была очень популярна. Мой экземпляр — из допечат-



4

ки в 100 000 экземпляров к основному тиражу книги. Книга стала заметным явлением в абитуриентской литературе и задала эталон обстоятельного и точного объяснения излагаемого материала. Этот стиль Михаил Константинович привнес в наши совместные учебники серии «МГУ — школе» для 5–11-х классов, над которыми мы работали с 1985 года (в Федеральном перечне учебников с 1996). В них та же неторопливость и постепенность в развертывании содержания изучаемого материала.

Не передать словами того шока, который я испытал, когда мне выпало счастье писать учебники с такими мастерами, как академик С.М. Никольский и профессор М.К. Потапов. Я ловил каждое их слово, так как к тому времени имел за плечами всего лишь 12 лет работы в школе. Я учился у них, задавал вопросы, делал свои предложения, опирающиеся на опыт общения со школьниками и учителями. Однажды я переадресовал Михаилу Константиновичу вопрос учителей: «Почему в своих учебниках при решении неравенств вы так поздно вводите нестрогое неравенство?» Его ответ мне запомнился, и я часто привожу его на моих встречах с учителями: «А куда мы спешим? Сначала ученик должен освоить способы решения строгих неравенств всех типов, предусмотренных программой, а потом переходить к изучению нового для себя объекта — нестрогого неравенства. Нестрогое неравенство — это и не неравенство вовсе, а совокупность уравнения и неравенства». Если не развести эти понятия, то ученик будет с совокупностью работать как со строгим неравенством и допускать ошибки.

В самом деле, мы же хотим добиться понимания учеником выполняемых им действий, а не учим лайфхакам, как теперь пишут в интернете,

то есть не учим способам получения верного ответа без понимания смысла выполняемых действий. И это только один пример, одна искорка в том фейерверке моего общения с Учителем.

После учебников мы с Михаилом Константиновичем написали книги для учителя и дидактические материалы (для 5–11-х классов), рабочие тетради (для 5–9-х классов), много совместных статей, но это уже совсем другая история, о которой надо рассказывать отдельно, чтобы не выйти за рамки жанра «поздравительная открытка».



Дорогой и глубокоуважаемый Михаил Константинович, от меня, от ваших коллег, от учителей математики примите сердечные поздравления с замечательным юбилеем! Желаем Вам здоровья, бодрости, сил и дальше делиться своими знаниями и опытом со всеми, кто учит российских школьников математике. Успехов Вам во всех делах — вопреки обстоятельствам!



Г. АДЖЕМЯН,
 adzhemyan@i.home-edu.ru,
 А. ГРИЩЕНКО,
 grishhenko@i.home-edu.ru,
 г. Москва

Иллюстрации предоставлены
 авторами статьи

«ШЕФСКИЙ УРОК» ДЛЯ ДЕТЕЙ С ОВЗ

В поисках путей организации учебного взаимодействия учащихся разных параллелей особую значимость приобретает форма урока. «Шефский урок» — это такая форма урока, при проведении которого реализуется сотрудничество старшеклассников с учебной группой из средней школы. На таких уроках учебную деятельность нужно анализировать не саму по себе, а как составляющую учебной ситуации, в которой главную роль играет социальное взаимодействие учащихся из средней школы со старшеклассниками и между собой.

Перед учителем ставится непростая задача по организации учебного процесса: нужно определить, какие задания для этого потребуются и какие средства обучения стоит использовать. Безусловно, для этих целей потребуется специально организованная среда учебного сотрудничества со следующими составляющими организации совместного действия:

- распределение начальных действий;
- обмен способами действий, использование различных моделей в качестве средств получения результатов работы разными участниками действия;
- взаимопонимание, позволяющее установить соответствие между собственными действиями и действиями других участников, включенных в работу;
- коммуникация или общение, обеспечивающее осуществление процессов распределения, обмена и взаимопонимания;
- планирование способов совместной работы и построение соответствующих схем и планов работы;
- рефлексия, обеспечивающая преодоление ограничений собственной работы относительно общей схемы деятельности.

Общая особенность совместной деятельности при проведении шефского урока состоит в преобразовании, перестройке позиции личности в отношении к усвоенному содержанию и собственным взаимодействиям. Это может выражаться в изменении ценностных установок, целей учения и смысловых ориентиров, а также способов взаимодействия между участниками процесса обучения, их взаимоотношений.

В статье представлен опыт проведения шефского урока в Государственном казенном общеобразовательном учреждении «Школа «Технологии обучения», где обучаются дети с ограниченными возможностями здоровья, в том числе и с умственной отсталостью, в очно-дистанционной форме и процесс обучения обеспечивается современными информационными технологиями. Рассказано об организации учебного взаимодействия между учениками средней школы, пятиклассниками и одиннадцатиклассниками, на межпредметном уроке. Приведены примеры заданий, позволяющих установить соответствие между действиями старшеклассников и других участников урока, включенных в работу.

Шефский урок проводился в рамках Всероссийской акции и был посвящен 125-летию со дня рождения Сергея Есенина. Урок проводили ученики 11-го класса для учеников 5-го класса с умственной отсталостью при помощи коммуникационного программного обеспечения Zoom, которое объединяет видеоконференцию, чат и мобильную совместную работу.

Перед учителем стояли непростые задачи:

- организовать учебное сотрудничество так, чтобы были учтены все особенности работы с такими учащимися,
- продумать специальные условия обучения (например, увеличение курсора и шрифта, помощь ассистента и т.п.),
- предусмотреть вариативные приемы работы: поэлементная инструкция, планы-алгоритмы и схемы выполнения (наглядные, словесные), вопросы (подсказывающие, альтернативные, наводящие, уточняющие и проблемные), чередование легких и трудных заданий (вопросов), а также их адаптация для этой категории детей и т.п.

Дети 5-го класса на уроке работали вместе со своими родителями — тьюторами, функция которых состояла только в технической помощи ученикам (включить необходимую программу, дать общий доступ экрана ученика и т.д.). Несмотря на то, что все ученики и их родители нашей школы проходят первоначальное знакомство с дистанционными продуктами, возможностями электронных курсов, тетрадей, постоянно появляются новые информационно-технические возможности, которые учителя используют в процессе преподавания.

Готовясь к шефскому уроку, мы продумывали все задания, которые ученики 11-го класса смогут объяснить, а ученики 5-го класса выполнить без затруднений. Для этого специальные маршрутные карты урока отдельно для учащихся 5-го класса и учащихся 11-го класса были составлены с учетом вышеперечисленных требований. Предложенные задания были интегрированы с другими предметами — географией, русским языком, историей.

Урок был составлен в виде путешествия по основным этапам жизни и творчества С.А. Есенина. Так как урок был межпредметным (чтение, математика), то этапы урока были названы соответственно: «Остановка поэтическая» — задания по чтению, «Остановка математическая» — задания по математике. Вы-

полняя задания, ученики повторяли материалы и других предметов (географии, истории), вспоминали музыкальные произведения на стихотворения С.А. Есенина.

ХОД УРОКА

Работа с эпиграфом

Цель и задачи урока пятиклассники сформулировали самостоятельно, прочитав и обсудив со старшеклассниками эпиграф (стихотворение Сергея Есенина).

Задание. Прочитайте (послушайте) эпиграф и определите, о ком сегодня пойдет речь.

Стою один среди равнины голой,
А журавлей относит ветер вдаль,
Я полон дум о юности веселой,
Но ничего в прошедшем мне не жаль.

Не жаль мне лет, растрченных напрасно,
Не жаль души сиреневую цветъ.
В саду горит костер рябины красной,
Но никого не может он согреть.

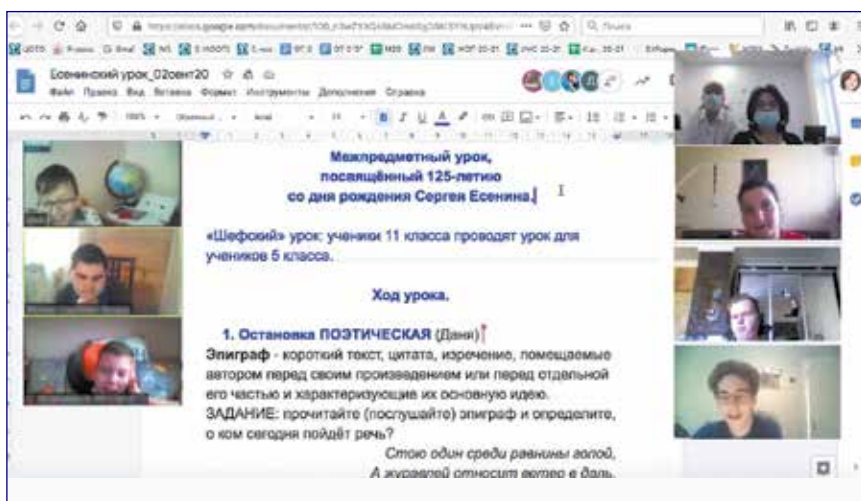
Сергей Есенин

Обсуждение эпиграфа проводили одиннадцатиклассники, опираясь на вопросы в маршрутных листах.

1. Что вы знаете о Сергее Есенине?
2. Какие стихи С. Есенина вам знакомы? О чем они?
3. Что вы можете сказать о Есенине по словам эпиграфа?

На основании вопросов ученики 5-го и 11-го классов определили тему урока: «Жизнь и судьба русского поэта Сергея Александровича Есенина».

После работы с эпиграфом ученики приступили к выполнению заданий по русскому языку, чтению и математике, связанных с творчеством С.А. Есенина.



Разминка

В задании для разминки пятиклассникам было предложено обсудить, какое литературное событие отмечает российская общественность в начале октября (125-летие со дня рождения С.А. Есенина).

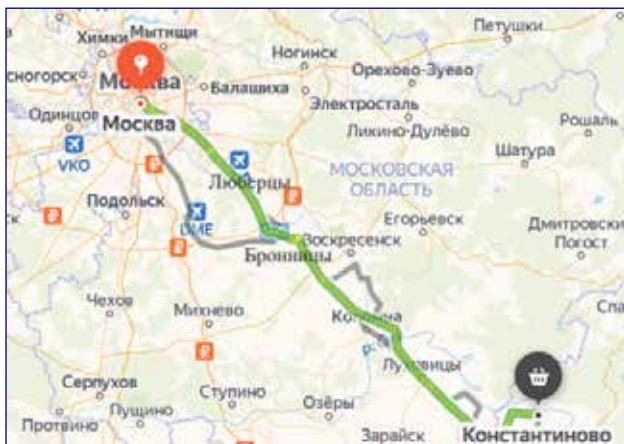
Задание. В этом году мы празднуем 125-летие великого поэта Сергея Есенина. Напишите, сколько сотен, десятков и единиц в числе 125?

Выполняя это задание, пятиклассники не только повторили состав числа, но и узнали некоторые факты из жизни великого поэта, которыми поделились с ребятами одиннадцатиклассники.

Остановка «Математическая»

Остановка математическая, но задание межпредметное. Пятиклассникам нужно вспомнить, как работать с географической картой, чтобы определить расстояние между Москвой и селом Константиново Рязанской области, где родился великий русский поэт и где сегодня находится Государственный музей-заповедник С.А. Есенина. *Одиннадцатиклассник читает условие задачи.*

Задание. Отправимся в село Константиново, где родился великий поэт Сергей Есенин. Рассмотрим географическую карту и определите, на каком расстоянии находится село Константиново от Москвы.



На автомобиле можно ехать по следующему маршруту: от с. Константиново проехать 53 км до г. Луховицы; потом ехать 24 км до г. Коломна. Здесь можно сделать остановку, отдохнуть. Далее ехать 50 км до г. Бронницы, потом 48 км — до г. Люберцы, а расстояние от г. Люберцы до Москвы составляет 43 км. Вычислите, сколько километров составляет путь от села Константиново до Москвы.

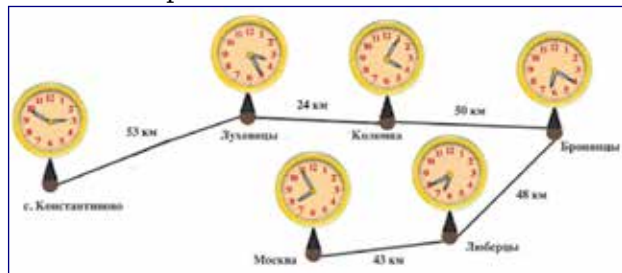
Одиннадцатиклассники подготовили вопросы, которые помогли пятиклассникам справиться с этой задачей.

1. Как найти расстояние от села Константиново до г. Коломны?

2. Сколько километров составляет путь от Бронниц до Москвы?

3. В котором часу автомобиль приехал в Коломну?

4. Какое время показывают часы в Москве?



В маршрутных картах пятиклассников была размещена квадратная сетка, где они записывали свои решения.

Решение.									

Остановка «Литературная»

Переход к остановке «Литературная» тоже связан с географией, так как вопрос касается указательного знака, расположенного у села Константиново. *Одиннадцатиклассник объясняет условие задания.*



Задание. У села Константиново стоит необычный указатель. На нем не только название населенного пункта «Село Константиново», но и четверостишие Есенина, которое настраивает на соответствующую поэтическую волну:

Я буду воспевать
Всем существом в поэте
Шестую часть земли
С названием кратким Русь...

Прочитайте выразительно строки из произведения С.А. Есенина.

1. Какое средство выразительности использует автор?
2. С какой целью он это делает?
3. Что мы скажем о поэте, читая эти строчки?

Остановка «Видеозал»

На нашем уроке мы предложили ученикам внимательно посмотреть мультфильм по стихотворению Сергея Есенина «Песнь о собаке».



Грустная история заставила их задуматься не только о судьбе щенков, несчастной матери-собаки, но и вспомнить, что такое сострадание, научиться переживать за других, чувствовать чужую боль. Обсуждение содержания этого стихотворения прошло особенно эмоционально, во-первых, потому что дети с ограниченными возможностями сами перенесли или переносят боль, умеют сопереживать, во-вторых, потому что делились своими впечатлениями с такими же детьми, только немного старше, одиннадцатиклассниками.

Остановка «Поэтически-музыкальная»

На этой остановке наш урок завершился прослушиванием романса на слова Сергея Есенина «Отговорила роща золотая...». Тут уже не нужно было просить пятиклассников отвечать, они вместе с одиннадцатиклассниками, родителями

и учителями допели романс. Дети выразили желание еще раз встретиться таким же составом, попробовать выполнить более сложные задания.

Некоторые выводы

Итоги шефского урока были подведены на следующем уроке: пятиклассники самостоятельно воспроизвели в своих рабочих тетрадях материал, прослушанный на прошедшем занятии, в виде краткой записи или плана.

Однозначно, такие задания не вызывают у учеников затруднений, они позволяют закрепить не только учебные навыки, но и коммуникативные, развивают активность, самостоятельность. С большим интересом дети выполняют задания после просмотра видеофрагментов, прослушивания аудиозаписей.

Практикуя организацию и проведение шефского урока, мы пришли к выводу, что такие уроки, когда старшеклассники ведут искреннюю беседу с учениками средних классов, позволяют повышать эффективность обучения, развивать активность, самостоятельность, личную инициативу и творческие способности учащихся. Работая по новым технологиям, мы смогли сделать урок ярким, интересным. Дети обсуждали, спорили, доказывали, исследовали, не боясь строгих учительских оценок. Мы, учителя, для себя «открыли» учеников, увидели в них новые черты, о которых даже не подозревали. Такие уроки приносят радость и удовлетворение от работы. Конечно, наш поиск новых методов и приемов работы с детьми с ОВЗ продолжится. Ведь важно давать знания ученикам не в готовом виде, а добывать их совместно. Только нужно помнить, что важным подходом к воплощению новых идей всегда были простота, надежность, доступность.

КАК СТАТЬ АВТОРОМ ЖУРНАЛА «МАТЕМАТИКА»?

Сделать это несложно: надо лишь написать статью и прислать ее в редакцию журнала. И еще одно условие — она должна быть интересна и полезна вашим коллегам. Требования к оформлению статьи:

- Материал должен быть напечатан на компьютере или на пишущей машинке.
- Рисунки должны быть четкими, аккуратными, выполненными на белой нелинованной или клетчатой бумаге с помощью чертежных инструментов. Если вы хорошо владеете компьютером, можете воспользоваться для этого программой Corel Draw.

- Рисунки надо пронумеровать, нумерация должна соответствовать их нумерации в тексте.

- Фотографии должны быть цветными. Формат фотографий, отпечатанных на бумаге, не менее 10 × 15 см. Размер цифровых фотографий не менее 800 × 600 пикселей, формат JPG, качество, используемое при сохранении JPG-файлов, высокое (high).

Прислать статью можно по почте или по электронной почте. Всю необходимую для этого информацию вы найдете на странице 2 журнала.

Т. ЛИТВИНЕНКО,
г. Санкт-Петербург

Из опыта работы

КАРТОЧКИ-ПОДСКАЗКИ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРИИ

Статья будет интересна учителям математики, работающим в общеобразовательных школах с учащимися, имеющими ограниченные возможности здоровья, а также студентам профильных вузов, репетиторам и родителям, которые хотят помочь своим детям понять и полюбить такой непростой учебный предмет, как геометрия. Данная статья — это обобщение моего большого педагогического опыта. Кто-то не увидит в ней ничего нового, кто-то вспомнит хорошо забытое старое, кто-то откроет для себя интересные моменты в преподавании предмета.

Когда я училась на олигофренопедагога, то был у нас предмет специальная психология. Вела его профессор Любовь Сергеевна Мотылева. Как и другие предметы, этот курс содержал большое количество специальной терминологии, и Любовь Сергеевна показала нам, как без особых усилий, легко и непринужденно, можно запомнить весь этот объемный материал. После каждой лекции мы должны были сделать карточки: на одной стороне писалось понятие и его определение, с другой стороны — понятие и первые буквы слов определения. Выглядело это примерно так:

Мышление

— это способность пишущей руки двигаться в соответствии с постоянно меняющимся пространством

Мышление

— э. с. п. р. д. в. с. с п. м. п.

В начале лекций Любовь Сергеевна проводила опрос по определениям, карточками можно было пользоваться при ответе, но было одно «но»: пользоваться можно было только той стороной, на которой были лишь первые буквы слов. И так от лекции к лекции. Когда пришло время экзамена, то нам разрешили принести на него все карточки-определения. Но с условием, что это новые карточки, на которых написано только понятие и первые буквы слов определения этого понятия. Стоит отметить, что карточки теперь выступали не как подсказки, а как психологическая поддержка, во время экзамена мало кто к ним обращался.

Я стала применять для себя данный способ запоминания, познакомилась с трудами В.Ф. Шаталова, интересовалась литературой по стенографии, вернулась к записям лекций по теоретическим основам начального курса математики В.М. Винокурова, читала про мнемотехнику. Спустя годы, на курсах по АВА-терапии у Екатерины и Александры Жестковых, столкнулась с методом холодных проб, и родилась у меня идея собрать воедино все то, что я знаю и умею.

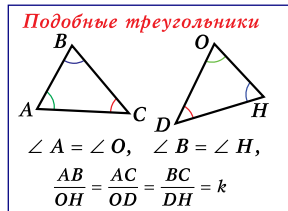
Чаще всего в моей педагогической практике приходится работать с детьми, имеющими ограниченные возможности здоровья, и хорошо если они научены учиться... Математика — предмет, который требует от многих моих учеников приложения большого количества сил, а на выходе нередко получается лишь незначительный положительный результат. Нет результата — нет мотивации.

Все мы прекрасно понимаем, что пока понятие, определение или теорема не будут ребенком выучены, не будет активного использования данного знания в практической работе. Сначала мы даем ребенку пассивное слово, потом слово должно стать активным, а после этого оно будет применяться в практике как нечто само собой разумеющееся.

И вот волею случая «заполучив» детей, которые имели двойку по математике и ярлык «ни на что не годные», которые «терпеть не могли эту геометрию», решила попробовать.

Цель была помочь ребенку научиться решать задачи конкретного раздела и при этом восстановить знания предыдущих разделов программы. На помощь пришли мои карточки и родители учащихся. Без них, мам и пап, мало что может получиться, они наши союзники, наши руки и наши глаза. Родители контролировали процесс изготовления карточек и их многократное применение ребенком.

Подобные треугольники
Подобные треугольники — это два треугольника, у которых углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника



Как же использовались эти карточки? Сначала ученик получал задачу, а я выкладывала перед ним карточки со всеми определениями, свойствами и теоремами, которые необходимо вспомнить и применить при ее решении. В ходе решения задачи ребенок многократно повторял формулировки и видел перед собой чертежи-подсказки. На следующем этапе ребенок без помощи взрослого решал аналогичные задачи с использованием карточек-подсказок. Он уже узнавал что-то, радовался, что запомнил ненавистное ранее свойство.

Далее усложняю. Даю задачу, выкладываю перед ребенком карточки и уточняю, что их не все нужно использовать при решении данной задачи. Теперь ему предстоит выбрать из имеющихся карточек только те, что помогут довести решение до конца.

Да, процесс небыстрый, он скорее индивидуальный или рассчитан на малую группу, но он дает результат. Даже если ребенок «не видит» чего-то на

чертеже, он уже испытывает меньше тревожности на уроке, понимая учителя или одноклассника, решающего задачу у доски, он успевает записывать, он мыслит и «двигает рукой», следит за постоянно меняющимся пространством.

Но этого недостаточно, чтобы стать успешным, необходимо выполнить еще ряд требований. Одно из них — карточка должна быть написана самим ребенком (не родителем, не учителем, не распечатана, не скинута на планшет). Второе требование — читать карточки перед сном. Опыт показал, что этот способ запоминания очень удобен. Нет, дети не станут сразу разбираться и сходно решать задачи по геометрии, чуда не произойдет, но понимание того, что «не так страшен волк, как его малюют», придет однозначно. А следом за ним придет и понимание геометрии, а может, даже и любовь к этому предмету. Но даже если использовать карточки, которые представлены в электронном виде, толк будет. Кроме того, эти карточки не содержат рисунка. Это сделано специально. Ребенку необходимо сделать на распечатках чертеж своими руками, чтобы до конца понять смысл написанного.

Свойства прямоугольных треугольников

Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы

Свойства прямоугольных треугольников

К. п. т., л. п. у. в 30° , р. п. z

Многие ведут тетради, в которые выписывают определения, теоремы или опорные конспекты. Тетрадь-справочник очень удобная вещь. Но карточки-подсказки более мобильны, их можно положить на прикроватную тумбочку или взять в поездку, их удобно разложить перед собой при решении задачи, не тратя время на перелистывание справочника. С ними можно придумывать игры, включая тем самым соревновательный момент в процесс обучения. Самым удобным размером карточки оказался размер сложенного в два раза тетрадного листа: и текст умещается, и в руке помещается, и для транспортировки удобно, и на парте не особо место занимает.

Есть идея перевести карточки в формат сайта learningapps.

Я не ставила перед собой цели дать на «суд зрителя» конспект урока с подробным разбором решения конкретной задачи. Я хотела поделиться своими знаниями и опытом, вспомнить и поблагодарить тех, кто помог мне идти по пути педагогики и пробовать все новое, что является хорошо забытым старым. Надеюсь, статья была полезна для прочитавших, и вы сможете использовать этот метод в учебном процессе со своими учениками, привнося в него новое и интересное.

И. ВЫСОЦКИЙ,
В. ШАПАРНА,
г. Москва

8–9 классы

ОБ УСЛОВНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ В ШКОЛЕ

■ Условная вероятность — одно из краеугольных понятий теории вероятностей. События, которые наступают в ходе случайного эксперимента, могут менять вероятности других событий — увеличивать или уменьшать их. Вероятность выбросить два орла, дважды бросая монету, равна 0,25. Но если в первый раз орел уже выпал, то эта вероятность повышается до 0,5. А если при первом броске выпала решка, то вероятность события «два орла» тут же снижается до нуля.

Мы все знаем формулу условной вероятности события A при условии B , которая обычно принимается как само собой разумеющееся. Следование этой формуле подразумевает формальное описание свершившегося события B и поиск его вероятности, а также поиск вероятности совместного наступления событий A и B . При этом суть формулы часто остается таинственной, а условную вероятность часто смешивают с вероятностью пересечения событий.

Нам кажется, что школьный рассказ об условной вероятности должен апеллировать к формуле в последнюю очередь. Гораздо важнее научиться находить вероятности одного и того же события при разных условиях на практике. Здесь хорошо помогут диаграммы, схемы, графы и просто здравый смысл.

Ключом является правило умножения вероятностей последовательно рассматриваемых событий. Например, пусть событие B случается с вероятностью $x = 0,3$, и при условии, что B наступило, событие A имеет вероятность $y = 0,7$. Тогда событие $A \cap B$ имеет вероятность $xy = 0,21$.

Если это рассуждение кажется не очень понятным, сравните его со следующим рассуждением, в котором нет слова «вероятность»: 30% всех домов в поселке — двухэтажные; 70% двухэтажных домов в поселке покрашено в зеленый цвет; это значит, что $0,7 \cdot 0,3 \cdot 100\% = 21\%$ всех домов — это двухэтажные дома зеленого цвета.

В принятых терминах и обозначениях теории вероятностей правило умножения записывается так:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B). \quad (1)$$

Вертикальная черта перед событием B означает, что событие B рассматривается не как случайное, а как уже наступившее событие, изменившее вероятность события A .

Вместо того чтобы запоминать формулу, лучше научиться ее применять. Это удобно и легко сделать с помощью дерева случайного опыта, где правило умножения становится наглядным. В дереве элементарные события изображаются цепочками, идущими от начальной вершины S (start) к конечным вершинам. Чтобы найти вероятность элементарного события, то есть цепочки, нужно умножить условные вероятности вдоль этой цепочки.

Проиллюстрируем сказанное. На рисунке 1 дерево некоторого случайного опыта, в котором могут наступить несовместные события M и N , а затем события A , B и C .

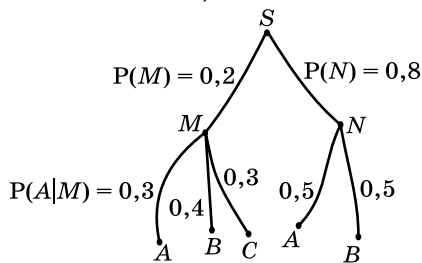


Рис. 1. Дерево некоторого случайного опыта

Найдем вероятность события $A \cap M$. Это событие наступает, только если осуществляется цепочка SMA : сначала наступает M , а затем — событие A при условии, что M уже случилось. Поэтому

$$\begin{aligned} P(A \cap M) &= P(SMA) = \\ &= P(M) \cdot P(A|M) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06. \end{aligned}$$

Когда мы написали, что правило умножения принято записывать в виде (1), мы немного погрешили против истины. Обычно множители записывают в другом порядке:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B). \quad (2)$$

Согласитесь, вроде то же самое, но нарушено восприятие: запись не соответствует мыслимому порядку наступления событий: сначала B , а затем A . Почему используется именно такой порядок множителей — вопрос правильный и интересный, но ответ выходит за рамки нашего рассказа. Упомянем лишь, что такой порядок аналогичен принятому порядку множителей при записи дифференциала функции $f(x)dx$ и что эта аналогия не случайна.

Если $P(B) \neq 0$, то равенство (2) равносильно известной формуле условной вероятности

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (3)$$

Если принять эту формулу как определение (так обычно поступают), то смысл условной вероятности остается туманным, а правило умножения появляется как следствие. Нам представляется разумным противоположный путь — от интуитивного понимания условной вероятности и умножения долей к решению задач с помощью деревьев. При желании и необходимости можно дойти до формулы (3) как естественного, но не очень нужного следствия.

Формула Байеса

Если совместить на одном рисунке цепочки SAB и SBA , ведущие от начала эксперимента S , мысленно упорядочивая события A и B двумя способами, то обе эти цепочки раз-

ными путями приведут нас к одному и тому же событию $A \cap B$. Обычно никакого «порядка событий» нет. Мы скорее говорим об удобном порядке рассмотрения событий. Какое из них считать первым — условность. В разных задачах удобно по-разному.

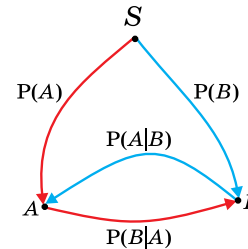


Рис. 2. Событие $A \cap B$ достигается разными путями

Например, если эксперимент состоит в последовательных бросаниях монеты, то разумно рассматривать события в том порядке, в котором они наступают.

Получаются два равенства:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B|A), \\ P(A \cap B) &= P(B) \cdot P(A|B). \end{aligned}$$

Приравняем правые части:

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A). \quad (4)$$

Если $P(A) \neq 0$, то можно записать

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}. \quad (5)$$

Удивительно, что равенство (5) называют формулой Байеса. Причина сугубо историческая: Томас Байес (1702–1763) — английский математик XVIII в. вошел в историю благодаря теореме, доказанной именно в форме (5). Именно это равенство представлялось в те времена крайне важным, ведь оно давало возможность оценить вероятность события B при условии A , если известна вероятность A при условии B .

Мы не преувеличиваем. То, что мы сейчас изложили в нескольких строках с помощью схемы на рисунке 2, в середине XVIII в. представляло собой факт громадного значения, получивший имя первооткрывателя.

Возможно, формула Байеса действительно является фактом громадного значения, поскольку обладает свойством фундаментальных фактов: частные случаи формулы Байеса в большинстве приложений выглядят намного сложнее, чем формула в самом общем виде.

Формула полной вероятности

Снова обратимся к дереву на рисунке 1 и найдем вероятность события A , которое, как мы видим, может наступить не только при условии M , но и при условии N . Значит, вероятность события A равна сумме вероятностей двух благопри-

являющихся ему элементарных событий, то есть цепочек SMA и SNA (рис. 3).

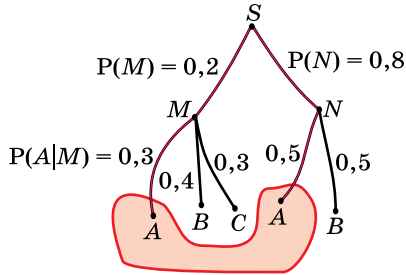


Рис. 3. Собираем полную вероятность события A из двух «неполных», то есть из вероятностей двух цепочек

$$P(A) = P(SMA) + P(SNA),$$

$$P(A) = P(M) \cdot P(A|M) + P(N) \cdot P(A|N).$$

Снова поменяв местами множители в угоду сложившейся традиции (напомним, что эта традиция не просто так), получим формулу полной вероятности события A и гипотез M и N :

$$P(A) = P(A|M) \cdot P(M) + P(A|N) \cdot P(N).$$

В данном конкретном случае получается:

$$P(A) = 0,3 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,8 = 0,46.$$

Последнее равенство, записанное в числах, заставляет задуматься над аналогией между вероятностью и средним арифметическим. Действительно, ведь написанное есть не что иное, как среднее арифметическое двух вероятностей 0,3 и восьми вероятностей 0,5.

Остановимся и не будем продолжать строить аналогии. Вместо того предложим три урока для 8–9-х классов. Уроки разработаны для проекта «Математическая вертикаль» и соответствуют учебным пособиям [1–4].

Урок 1. Условная вероятность

Цель: сформировать представление об условной вероятности.

Часто случайное событие A в случайном опыте приходится рассматривать при условии, что уже произошло некоторое событие B . Наступление события B меняет эксперимент. По сути, при наступлении некоторого события мы получаем новый эксперимент, вероятности других событий при этом могут измениться.

Пример 1. В семье двое детей. Если считать, что рождение мальчика и девочки равновероятны, ответьте на вопросы:

а) какова вероятность того, что в семье оба ребенка девочки;

б) известно, что один из них девочка. Какова вероятность того, что другой ребенок тоже девочка?

Желательный результат обсуждения. В случае «а» элементарных исходов четыре: ММ, МД, ДМ, ДД. Вероятность рождения двух девочек равна $\frac{1}{4}$. В пункте «б» спрашивается тоже о вероятности рождения двух девочек. Но кардинальное отличие состоит в том, что вероятность надо найти исходя из дополнительного условия: один из детей — девочка. Это условие меняет суть эксперимента. Элементарных событий уже не четыре, а три: МД, ДМ, ДД. Искомая вероятность события ДД равна $\frac{1}{3}$, а это больше, чем $\frac{1}{4}$.

Мы нашли вероятность того, что в семье две девочки, при условии, что один ребенок — девочка. И она отличается от вероятности такого же события «две девочки», которое рассматривается без условий. Условие «один из детей — девочка» увеличило вероятность двух девочек.

Вероятность наступления события при условии, что какое-то событие заведомо наступило, называется *условной вероятностью*.

Определение условной вероятности. Вероятность события A при условии, что событие B произошло, называется условной вероятностью события A при условии события B . Обозначается эта вероятность $P(A|B)$.

Рассмотрим это понятие подробнее.

Пример 2. Правильную игральную кость бросают дважды. Найдите вероятности событий:

а) в первый раз выпало менее шести очков и сумма очков равна 8;

б) в первый раз выпало менее шести очков, если известно, что сумма выпавших очков равна 8.

Желательный результат обсуждения. Введем обозначения для событий: A «в первый раз выпало не больше 5 очков» и B «сумма выпавших очков равна 8».

В пункте «а» нужно найти вероятность пересечения событий A и B . Благоприятствующих исходов всего $N(A \cap B) = 4$ (рис. 4), поэтому

$$P(A \cap B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Рис. 4

В пункте «б» нужно найти вероятность события A при условии, что событие B наступило. Такое событие обозначается $A|B$.

Если событие наступило, то от всего эксперимента осталось лишь пять элементарных событий: (6; 2), (5; 3), (4; 4), (3; 5), (2; 6). Событию A из них благоприятствуют четыре последних (рис. 5).

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Рис. 5

Поэтому

$$P(A|B) = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Чтобы понять, чем отличается безусловная вероятность от условной, проиллюстрируем эксперименты на диаграммах Эйлера (рис. 6).

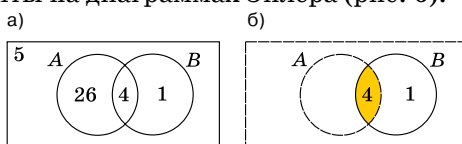


Рис. 6

В пункте «а» мы нашли вероятность события исходя из того, что всего элементарных событий 36 (рис. 6,а). Когда же нас просят найти условную вероятность «б», эксперимент уже другой — он свелся к событию B (рис. 6,б), и нужно найти долю благоприятных исходов уже не среди всех 36 событий, а среди пяти, благоприятствующих событию B .

Пример 3. При двукратном бросании игральной кости сумма выпавших очков равна 9. Найдите условную вероятность следующих событий:

- а) в первый раз выпало 5 очков;
- б) при одном из бросков выпало 4 очка;
- в) в первый раз выпало меньше очков, чем во второй;
- г) во второй раз выпало меньше чем 3 очка.

Ответ: а) 0,25; б) 0,5; в) 0,5; г) 0.

Пример 4. В некотором опыте произошло событие B . Может ли это:

- а) увеличить вероятность другого события;
- б) уменьшить вероятность другого события?

Приведите примеры, когда условная вероятность события больше и когда она меньше исходной вероятности этого события.

Желательный результат обсуждения. Самые простые примеры можно привести с помощью бросания монет или игральной кости. Например, при двукратном бросании двух монет событие «хотя бы раз выпал орел» имеет вероятность 0,75.

Но если известно, что при первом броске выпал орел, то вероятность этого события увеличивается до 1. Напротив, если в первый раз выпала решка, то событие «хотя бы раз выпал орел» становится менее вероятным: вероятность уменьшается до 0,5.

Если же события относятся к разным броскам, то они не влияют друг на друга. Например, события «в первый раз выпал орел» и «во второй раз выпала решка» не влияют друг на друга: наступление одного из них не влияет на вероятность другого.

Таким образом, вероятность события A при условии события B может вырасти, уменьшиться или остаться прежней.

Пример 5. Игральную кость бросают дважды. Событие A заключается в том, что при втором броске выпало не больше 3 очков. Приведите пример события, наступление которого:

- а) не меняет вероятность события A ;
- б) уменьшает вероятность события A ;
- в) увеличивает вероятность события A .

Желательный результат обсуждения. Вероятность события A равна 0,5. Некоторое событие B не изменит вероятность события A , если при наступлении события B доля элементарных исходов, благоприятствующих A , не изменится и будет составлять половину всех исходов, благоприятствующих B . Таких событий много, например, «на первой кости выпало 1 очко». Сопроводите объяснение рисунком (рис. 7), из которого видно, что из шести исходов, благоприятствующих B , ровно половина благоприятствует A .

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Рис. 7

Аналогично некоторое событие B уменьшит вероятность события A , если доля элементарных исходов, благоприятствующих A , среди исходов, благоприятствующих B , меньше половины, и увеличит, если больше.

Например, событие, изображенное темными квадратами на рисунке 8, увеличивает вероятность наступления события A : его вероятность при условии B составляет $\frac{3}{5}$, что больше, чем 0,5.

Событие B можно описать как «сумма выпавших очков равна 6».

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Рис. 8

Уменьшает вероятность события A , например, событие «сумма выпавших очков равна 8» (рис. 9): она становится равна $\frac{2}{5}$.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Рис. 9

Предложите ученикам придумать другие примеры для каждого из пунктов.

Выводы и итоги урока. Условная вероятность — это вероятность случайного события при условии, что какое-то другое событие уже произошло и перестало быть случайным. Как только какое-то событие наступило, опыт изменился, а вместе с ним изменились вероятности других событий. Условная вероятность события может быть меньше или больше начальной (безусловной) вероятности. Иногда случается, что наступление одного события не меняет вероятность другого (в этом случае говорят, что события независимы).

Урок 2. Правило умножения

Цели:

- познакомиться с правилом умножения вероятностей;
- научиться применять формулу умножения вероятностей и вычислять условные вероятности.

На уроке 1 учащиеся узнали, что для нахождения вероятности события A при условии наступления события B нужно найти долю исходов, благоприятствующих A , не среди всех элементарных событий опыта, а лишь среди тех, что благоприятствуют событию B .

Пример 1. В некотором городе пятую часть населения составляют дети и подростки. Среди взрослых жителей четверть не работают (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т.п.). Какова вероятность того, что случайно выбранный житель города — взрослый работающий человек?

Желательный результат обсуждения. Искомая вероятность равна доле взрослых работников среди всего населения города. Из условия ясно, что взрослые составляют $\frac{4}{5}$ населения города и $\frac{3}{4}$ из них работают. Значит, $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$ населения — взрослые работающие люди. Искомая вероятность равна 0,6.

Предложите учащимся посмотреть на эту задачу с другой стороны. Пусть событие A «выбранный горожанин работает» и событие B «выбранный горожанин — взрослый». Из условия следует, что доля взрослого населения $\frac{4}{5}$ и есть вероятность $P(B)$. А $\frac{3}{4}$ — доля работающих среди взрослого населения — это условная вероятность $P(A|B)$. Вероятность одновременного наступления событий A и B оказалась равна произведению вероятностей, то есть

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Эту формулу мы получили на примере, но она верна для любых случайных событий в любых случайных опытах. Полученное равенство мы назовем *правилом умножения вероятностей*.

Правило умножения вероятностей. Вероятность пересечения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Если вероятность события B больше нуля, то из этой формулы следует способ нахождения условных вероятностей:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Пример 2. В парке установлены два автомата, продающие кофе. Вероятность того, что к концу дня кофе закончится в каждом отдельном автомате, равна 0,3. В обоих автоматах кофе заканчивается к вечеру с вероятностью 0,21. Вечером пришел мастер, чтобы обслужить авто-

маты, и обнаружил, что в первом кофе закончился. Какова теперь вероятность того, что во втором автомате кофе тоже закончился?

Желательный результат обсуждения. Введем обозначения событий: A «кофе закончился в первом автомате» и B «кофе закончился во втором автомате». Во всех четырех областях диаграммы подпишем вероятности соответствующих событий (рис. 10).

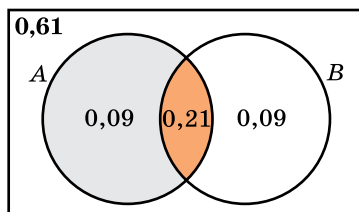


Рис. 10

Нужно найти вероятность события B при условии, что событие A наступило, то есть вероятность $P(B|A)$. Запишем правило умножения:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Подставим известные из условия значения: $P(A) = 0,3$, $P(A \cap B) = 0,21$. Получается:

$$0,21 = 0,3 \cdot P(B|A),$$

откуда

$$P(B|A) = 0,7.$$

Пример 3. Предположим, что в некотором городе 48% населения — мужчины, а среди мужчин 15% — пенсионеры. Какова вероятность того, что случайно выбранный житель города окажется мужчиной на пенсии?

Ответ: 0,072.

Пример 4. В некотором случайном опыте могут наблюдаться события A и B , причем $P(A) = 0,75$, $P(B) = 0,8$, а вероятность совместного наступления этих событий $P(A \cap B) = 0,5$. Найдите:

а) вероятность события A при условии, что наступило событие B ;

б) вероятность события B при условии, что наступило событие A .

Желательный результат обсуждения. Из правила умножения выразим условную вероятность события A при условии B :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,5}{0,8} = 0,625.$$

Аналогично можно получить условную вероятность B при условии A :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,5}{0,75} = \frac{2}{3} \approx 0,667.$$

Пример 5. Тест по истории сдали 85% учащихся школы, а тест по английскому языку — 70%

учащихся. Известно, что тест по английскому языку сдали 77% тех, кто сдал тест по истории. Найдите вероятность того, что случайно выбранный ученик из тех, кто сдал тест по английскому, также сдал тест по истории.

Желательный результат обсуждения. Введем обозначения: событие A «случайно выбранный ученик сдал тест по английскому», событие B «случайно выбранный ученик сдал тест по истории». Тогда, по условию,

$$P(A) = 0,7,$$

$$P(B) = 0,85, P(A|B) = 0,77.$$

А найти нужно $P(B|A)$.

Из правила умножения следует равенство

$$P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Подставляя известные значения, находим

$$0,7 \cdot P(B|A) = 0,85 \cdot 0,77,$$

откуда

$$P(B|A) = 0,935.$$

Пример 6. Тест по обществознанию сдали 90% учащихся школы, а тест по химии сдали 75% учащихся. При этом известно, что тест по химии сдали 63% тех, кто сдал тест по обществознанию. Найдите вероятность того, что ученик, случайно выбранный из тех, кто сдал тест по химии, также сдал тест по обществознанию.

Ответ: 0,756.

Пример 7. Рассеянный ученый проводил исследование и в некотором случайном эксперименте у него получились следующие вероятности:

$$P(N) = 0,44, P(M) = 0,8, P(N|M) = 0,65.$$

Не ошибся ли он?

Решение. Ошибся.

$$P(N \cap M) = P(M) \cdot P(N|M) = 0,8 \cdot 0,65 = 0,52,$$

что больше, чем $P(N)$. Вероятность пересечения событий не может быть больше вероятности любого из этих событий.

Пример 8. В некотором случайном опыте наступление события B увеличивает вероятность события A . Докажите, что в этом случае наступление события A увеличивает вероятность события B .

Выводы и итоги урока. Правило умножения вероятностей и формула условной вероятности, которая получается из этого правила, позволяют решать многие задачи, не разбираясь подробно в том, как именно устроен эксперимент. Они верны не только для опытов с равновероятными элементарными событиями, но и вообще для любых случайных опытов. Это делает изученные формулы удобным инструментом решения задач.

Урок 3. Дерево случайного опыта

Цели:

- познакомиться с деревом случайного опыта — удобным инструментом для наглядного представления случайного опыта;
- научиться строить дерево случайного опыта;
- научиться решать задачи на вычисление вероятностей при помощи дерева случайного опыта.

Дерево случайного опыта или **дерево вероятностей** — удобный инструмент решения задач, который позволяет рассматривать составной эксперимент как бы «по частям», мысленно расположить случайные события во времени или разбить на этапы. Объясним, как строить дерево эксперимента, на примере.

Пример 1. Велосипедист едет по парковой дорожке (рис. 11) и планирует выехать из парка через один из пяти выходов (A, B, C, D или E).

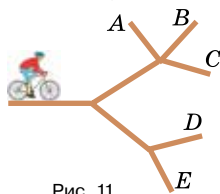


Рис. 11

Велосипедист едет только вперед и на каждой развилке случайным образом выбирает одну из дорожек, по которой еще не ехал. Какова вероятность того, что велосипедист покинет парк:

- а) через выход A ;
- б) через выход E ?

Желательный результат обсуждения. Начальное состояние, когда велосипедист не проехал ни один из перекрестков, изобразим точкой S (рис. 12).

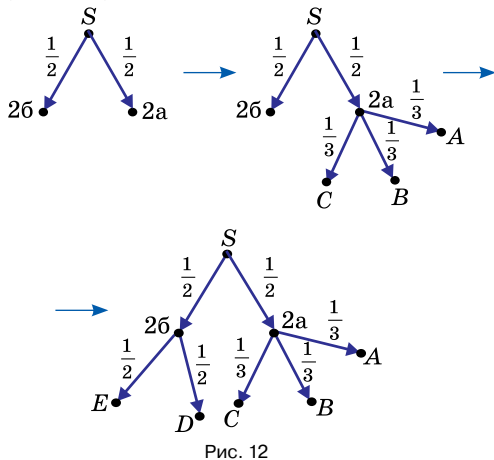


Рис. 12

Начальную точку, конечную и точки ветвления будем называть **вершинами** дерева.

На первом перекрестке велосипедист может с равными шансами поехать к одному из двух перекрестков — назовем их $2a$ и 26 . Прове-

дем стрелки от точки S вниз, вправо и влево. Стрелки будем называть **ребрами** дерева. Около ребер подпишем вероятности событий: в нашем случае вероятности равны $\frac{1}{2}$, так как, по условию, велосипедист выбирает дальнейший путь случайным образом.

Предположим, что велосипедист поехал к перекрестку $2a$. После этого может наступить одно из трех событий: он направится к выходу A , к выходу B или к выходу C . Изобразим эти элементарные исходы точками A , B и C и проведем к ним ребра. Вероятности тоже будут одинаковы и равны $\frac{1}{3}$. Аналогично из-

образим варианты, когда велосипедист поехал к перекрестку 26 .

Обратите внимание учащихся на то, что сумма вероятностей около всех ребер, выходящих из одной вершины, равна единице. При построении дерева эксперимента важно за этим следить, особенно поначалу.

Элементарные события эксперимента в дереве изображаются конечными вершинами дерева. К каждой конечной вершине ведет единственная цепочка от точки S . Поэтому можно считать, что элементарные события изображаются не только конечными вершинами, но и ведущими к ним цепочками. Например, в нашей задаче пять элементарных исходов и, соответственно, пять цепочек. Событию «велосипедист выехал через выход A » соответствует цепочка $S-2a-A$.

Вероятности, которые мы подписывали на ребрах, — условные. Например, условная вероятность того, что велосипедист покинет парк через выход A , при условии, что он был на перекрестке $2a$, равна $\frac{1}{3}$.

Предложите учащимся найти вероятности всех возможных элементарных событий. Для этого, пользуясь правилом умножения вероятностей, нужно найти произведения условных вероятностей вдоль каждой цепочки, ведущей от S к конечной вершине. Найденные произведения нужно сложить. Подпишите полученные вероятности на рисунке рядом с элементарными событиями (рис. 13).

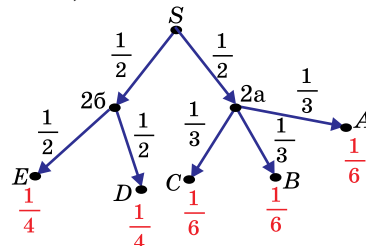


Рис. 13

Сумма всех вероятностей должна равняться единице (как сумма вероятностей элементарных событий). Более сложные события (не элементарные) изображаются на дереве промежуточными вершинами или какой-либо фигурой, объединяющей элементарные исходы.

Пример 2. Пусть известно, что выходы D и C ведут к пруду. Найдите вероятность того, что велосипедист выедет из парка к пруду.

Желательный результат обсуждения. На рисунке обведем элементарные события, благоприятствующие событию «велосипедист выедет к пруду» (рис. 14).

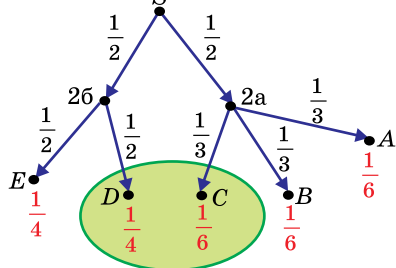


Рис. 14

Искомая вероятность равна сумме вероятностей наступления этих исходов, то есть

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}.$$

Можно сформулировать общее правило нахождения вероятностей событий с помощью дерева. Оно получается из правила сложения вероятностей элементарных событий.

Правило сложения. Чтобы найти вероятность события с помощью дерева, нужно сложить вероятности всех цепочек, ведущих к этому событию от начальной вершины.

Пример 3. На рисунке 15 изображено дерево опыта. Найдите:

- а) $P(K)$; б) $P(b|K)$;
- в) $P(A|K)$; г) $P(b)$;
- д) $P(A)$.

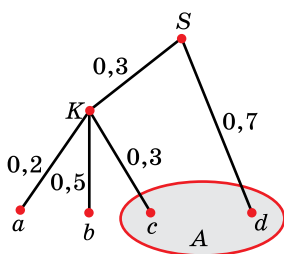


Рис. 15

Желательный результат обсуждения. Важно, чтобы учащиеся понимали, что вероятности из пунктов «а»–«в» уже подписаны на дереве:

$P(K) = 0,3$ — вероятность события K , то есть цепочки SK ;

$P(b|K) = 0,5$ — вероятность ребра Kb ;

$P(A|K) = 0,3$ — вероятность ребра Kc .

г) Чтобы найти вероятность элементарного события b , нужно перемножить вероятности вдоль цепочки SKb :

$$P(b) = P(K) \cdot P(b|K) = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15.$$

д) Событие A состоит из элементарных событий c и d .

$$P(d) = 0,7, P(c) = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09,$$

поэтому

$$P(A) = P(c) + P(d) = 0,79.$$

Дерево вероятностей является удобным и универсальным инструментом решения вероятностных задач.

Пример 4. В группе 3 мальчика и 5 девочек. Случайным образом выбирают двух человек. Какова вероятность того, что будут выбраны один мальчик и одна девочка?

Желательный результат обсуждения. Мысленно разобьем одновременный выбор двух человек на два последовательных выбора и изобразим дерево случайного опыта (рис. 16).

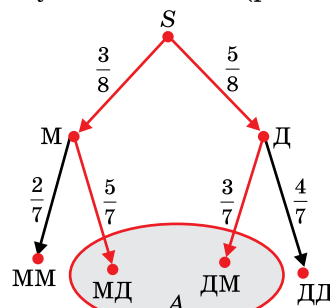


Рис. 16

Выбор мальчика обозначим буквой M , а девочки — буквой D . При первом выборе вероятность выбрать мальчика равна $\frac{3}{8}$, а девочку равна $\frac{5}{8}$. При втором выборе вероятности выбора мальчика и девочки становятся условными и зависят от того, кто был выбран в первый раз. Если в первый раз был выбран мальчик, то мальчиков осталось 2 из 7 человек. Поэтому во второй раз мальчик будет выбран (ребро $M-MM$) с вероятностью $\frac{2}{7}$, а девочка будет выбрана (ребро $M-MD$) с вероятностью $\frac{5}{7}$.

Точно так же, если в первый раз была выбрана девочка, остается 4 девочки и 3 мальчика из семи

оставшихся детей. Вероятности выбора мальчика и девочки теперь $\frac{3}{7}$ и $\frac{4}{7}$ соответственно.

Событию A «один мальчик и одна девочка» благоприятствуют два элементарных события, то есть цепочки $S-M-MД$ и $S-Д-ДМ$ (выделены красным цветом на рис. 16). Найдем вероятности этих цепочек и сложим результаты:

$$P(A) = P(S-M-MД) + P(S-Д-ДМ) = \\ = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{28}.$$

Пример 5. Автоматическая линия изготавливает зарядные устройства для телефонов. Известно, что 3% готовых устройств неисправны. Из этих неисправных устройств 98% обнаруживаются при контроле качества продукции. Однако система контроля ошибочно бракует 1% исправных устройств. Устройства, которые не забракованы, упаковываются и поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранное сошедшее с автоматической линии зарядное устройство поступит в продажу.

Желательный результат обсуждения. Построим дерево эксперимента (рис. 17).

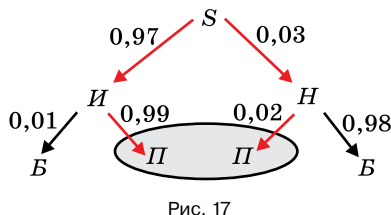


Рис. 17

Событие «устройство исправно» обозначим буквой I , а событие «устройство неисправно» — буквой H . Устройства, забракованные системой контроля (а точнее, событие «устройство забраковано системой»), обозначим буквой $Б$, событие «устройство не забраковано» обозначим буквой $П$.

Событию $П$ «устройство не забраковано» благоприятствуют цепочки $СИП$ и $SHП$, поэтому

$$P(П) = P(СИП) + P(SHП) = \\ = 0,97 \cdot 0,99 + 0,03 \cdot 0,02 = 0,9609.$$

Рассмотрим обратную задачу.

Пример 6. Агрофирма закупает куриные яйца в двух фермерских хозяйствах. 95% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства 20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получают 80% яиц. Найдите вероятность того, что случайное яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Желательный результат обсуждения. Построим дерево эксперимента (рис. 18).

Естественно, строить дерево, начиная с хозяйств. Так и поступим. Первое хозяйство (точнее, событие «яйцо из первого хозяйства») обозначим A , второе — B . Событие «выбранное яйцо окажется высшей категории» обозначим H , а остальные категории нам не нужны. Незвестную вероятность события A «яйцо из первого хозяйства» обозначим p .

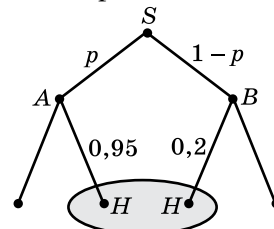


Рис. 18

Вероятность события H , по условию, равна 0,8. Этому событию благоприятствуют цепочки SAH и SBH , поэтому

$$P(H) = P(SAH) + P(SBH) = \\ = p \cdot 0,95 + (1 - p) \cdot 0,2 = 0,75p + 0,2.$$

Составим уравнение

$$0,75p + 0,2 = 0,8,$$

откуда

$$p = \frac{0,6}{0,75} = 0,8.$$

Пример 7. Игральную кость последовательно бросают до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не станет больше или равна 4. Найдите вероятность, что будет сделано ровно два броска.

Желательный результат обсуждения. Нарисуем дерево. Полное дерево не нужно. Достаточно рассмотреть один-два первых броска. Найдём в дереве цепочки, благоприятствующие событию A «сумма выпавших очков станет больше или равна 4 при двух бросках». Обведем конечные вершины этих цепочек (рис. 19).

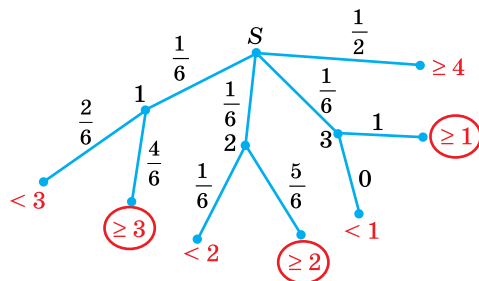


Рис. 19

Вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{4+5+6}{36} = \frac{5}{12}$$

В этом эксперименте очень много элементарных событий: все возможные серии бросков, когда при предпоследнем броске сумма выпавших очков меньше 4, а при последнем — больше или равна. Но с помощью дерева задача решается легко.

Пример 8. Экзаменационный билет состоит из трех вопросов. Вероятность того, что студент ответит на первый вопрос, равна 0,9, на второй — 0,8, на третий — 0,7. Найдите вероятность того, что студент, выбрав случайный билет, ответит по крайней мере на два вопроса.

Ответ: 0,902.

Пример 9. На столе было десять монет: две по 10 рублей, а остальные по 5 рублей. Антон, не глядя, кладет в один карман три случайные монеты, а все остальные — в другой карман. Найдите вероятность того, что обе десятирублевые монеты оказались в одном кармане.

Ответ: 0,533.

Пример 10. Всем пациентам с подозрением на одну из тропических лихорадок делают анализ крови. Если анализ выявляет возбудителя лихорадки, то результат анализа называется положительным. У больных лихорадкой анализ дает положительный результат с вероятностью 0,9. Если лихорадки нет, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,02. Известно, что у пациентов, посту-

пающих с подозрением на лихорадку, анализ оказывается положительным в 19,6% случаев. Найдите вероятность того, что поступивший с подозрением пациент действительно болен этой лихорадкой.

Ответ: 0,2.

Выводы и итоги урока. Дерево эксперимента — удобный универсальный метод решения задач. События, изображенные на дереве, мысленно упорядочены. Это помогает применять правила сложения и умножения вероятностей, а также расширяет круг задач, доступных для решения. Поэтому даже при небольшом навыке дерева становятся излюбленным способом решения многих задач.

Литература

1. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А., Высоцкий И.Р., Яценко И.В. Теория вероятностей и статистика. — М.: МЦНМО, 2011. 2. Высоцкий И.Р. Дидактические материалы по теории вероятностей. 8–9 классы. — М.: МЦНМО, 2018. 3. Высоцкий И.Р., Макаров А.А., Тюрин Ю.Н., Яценко И.В. Математическая вертикаль. Теория вероятностей и статистика. 7–9 классы. — М.: Просвещение, 2020. 4. Высоцкий И.Р., Яценко И.В. Универсальный многоуровневый сборник задач. 7–9 классы. — М.: Просвещение, 2020. 5. Высоцкий И.Р., Яценко И.В. Теория вероятностей и статистика. 7–9 классы. — М.: Просвещение, 2021.

Из интернета

Биологи доказали, что пчелы на самом деле не умеют считать
nation-news.ru2d

Сложность организации мозга насекомых уже давно ни у кого не вызывает сомнения. Этот тип не просто успешно просуществовал, но и эволюционировал именно благодаря сложному строению органов чувств и, как следствие, развитию совершенной нервной системы. В чем-то она даже превосходит человеческую: наш мозг не занят объединением информации от шести-восьми лап, крыльев, десятков глазков и пары антеннул.

Ранее были публикации, что австралийские ученые показали, что пчелы умеют считать до четырех. Притом число для них именно абстрактное понятие, так как пчелам неважно, что именно считать.

Биологи же из Института зоологии в Гуанчжоу доказали, что на самом деле пчелы не обладают навыками счета.

Чтобы доказать эту теорию, они провели специальный эксперимент. Группу насекомых разделили на две части. Каждую из них обучили вы-

бирать определенную табличку с тем или иным числом объектов. Когда пчелы выбирали правильный ответ, их угощали сиропом.

Спустя 24 часа ученые усложнили задачу и заставили насекомых выбирать из двух табличек, на которых было одинаковое число элементов.

Как оказалось, пчелы, которые до этого летали к табличке с более сложными фигурами, также выбирали сложные объекты, и наоборот. Это доказывает, что при выборе насекомые опираются только на визуальное восприятие.



Е. МИХАЙЛОВ,
дер. Заболотье,
Архангельская обл.

НЕСКОЛЬКО КРАСИВЫХ ЗАДАЧ НА ТЕОРЕМУ ВИЕТА

■ По школьной программе теорема Виета (и обратная теорема Виета) изучаются в 8-м классе. После этого ей не уделяется достаточного внимания. Однако теорема Виета помогает не только найти корни квадратного уравнения, но и часто является главным помощником при решении задач с параметром. Очень часто задачи на данную теорему встречаются на олимпиадах разных уровней. Ниже рассмотрена серия задач на применение теоремы Виета для квадратного трехчлена и многочленов более высоких степеней.

Сначала вспомним формулировки прямой и обратной теоремы Виета.

Теорема Виета. Пусть x_1, x_2 — корни квадратного трехчлена $x^2 + px + q$. Тогда справедливы формулы Виета:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= -p, \\x_1 \cdot x_2 &= q.\end{aligned}$$

Обратная теорема Виета. Пусть для чисел x_1 и x_2 выполнены равенства:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= -p, \\x_1 \cdot x_2 &= q,\end{aligned}$$

тогда x_1 и x_2 являются корнями квадратного трехчлена $x^2 + px + q$.

Доказательства этих теорем можно найти в любом учебнике по алгебре для 8-го класса.

Задача 1. Найдите сумму корней уравнения

$$16^x - (\lg^2 5 + \lg^2 2) \cdot 4^x = 4^{x+3} - 16.$$

Решение. Преобразовав уравнение, получим:

$$4^{2x} - (\lg^2 5 + \lg^2 2 + 64) \cdot 4^x + 16 = 0.$$

Положим $t = 4^x$, тогда уравнение примет вид

$$t^2 - (\lg^2 5 + \lg^2 2 + 64)t + 16 = 0. \quad (*)$$

Дискриминант

$$D = (\lg^2 5 + \lg^2 2 + 64)^2 - 64$$

этого уравнения, очевидно, больше нуля. Значит, уравнение (*) имеет два действительных корня: t_1 и t_2 . Применяя теорему Виета, получим, что

$$t_1 + t_2 = \lg^2 5 + \lg^2 2 + 64 > 0$$

и

$$t_1 \cdot t_2 = 16 > 0.$$

Следовательно, оба корня положительны.

Перейдем к решению первого уравнения. Так как функция $y = 4^x$ монотонна и $t_1 > 0$, то уравнение $4^x = t_1$ имеет единственный корень x_1 . Аналогично уравнение $4^x = t_2$ имеет единственный корень x_2 . Заметим, что

$$4^{x_1+x_2} = 4^{x_1} \cdot 4^{x_2} = t_1 \cdot t_2 = 16 = 4^2,$$

откуда $x_1 + x_2 = 2$.

Задача 2. Квадратный трехчлен

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

(a, b, c — целые, c — нечетное) имеет целые корни. Может ли число $P(2021)$ быть нечетным числом?

Решение. Пусть x_1, x_2 — корни квадратного трехчлена. Тогда, по теореме Виета,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} b = -a(x_1 + x_2), \\ c = ax_1 x_2. \end{cases}$$

Так как число c нечетное, то из условия $c = ax_1 x_2$ следует, что корни x_1, x_2 и коэффициент a нечетные. Тогда из равенства $b = -a(x_1 + x_2)$ имеем, что число b четное.

Значение

$$P(2021) = 2021^2 a + 2021b + c$$

представляет сумму двух нечетных чисел: $2021^2 a$ и c , и одного четного числа $2021b$. Значит, $P(2021)$ обязательно четное число.

Задача 3. Квадратный трехчлен $x^2 + ax + b$ имеет целые корни, по модулю большие 2. Докажите, что число $a + b + 1$ составное.

Решение. Пусть x_1, x_2 — корни квадратного трехчлена $x^2 + ax + b$. Тогда, по теореме Виета,

$$\begin{aligned} a &= -(x_1 + x_2), \\ b &= x_1 x_2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} a + b + 1 &= \\ &= x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = \\ &= (x_1 - 1)(x_2 - 1). \end{aligned}$$

Так как числа x_1, x_2 по модулю больше 2, то ни один из множителей $(x_1 - 1)$ и $(x_2 - 1)$ не равен ± 1 и не равен 0. Значит, число $a + b + 1$ является составным.

Задача 4. Рассматриваются квадратные трехчлены вида $x^2 + px + q$ с целыми коэффициентами, при этом $p + q = 30$. Сколько таких трехчленов имеют целые корни?

Решение. Пусть x_1, x_2 — целые корни квадратного трехчлена $x^2 + px + q$. Тогда, по теореме

Виета, $x_1 + x_2 = -p, x_1 x_2 = q$. Из равенства $p + q = 30$ следует, что

$$\begin{aligned} x_1 x_2 - x_1 - x_2 &= 30, \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) &= 31. \end{aligned} \quad (*)$$

Без ограничения общности можем считать, что $x_1 \leq x_2$. Тогда равенство (*) выполняется в двух случаях:

$$\begin{cases} x_1 - 1 = 1, \\ x_2 - 1 = 31 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_1 - 1 = -31, \\ x_2 - 1 = -1. \end{cases}$$

В первом случае $x_1 = 2, x_2 = 32$. Этим корням соответствуют числа $p = -(x_1 + x_2) = -34, q = x_1 x_2 = 64$ и квадратный трехчлен $x^2 - 34x + 64$.

Во втором случае $x_1 = -30, x_2 = 0$. Этим корням соответствуют $p = 30, q = 0$ и квадратный трехчлен $x^2 + 30x$.

Таким образом, условию задачи удовлетворяют два квадратных трехчлена.

Задача 5. Квадратный трехчлен $x^2 + bx + c$ имеет корни x_1 и x_2 , причем $2 < x_1 \leq x_2 < 3$. Докажите, что

$$5b + 2c < -12.$$

Решение. Так как $2 < x_1 \leq x_2 < 3$, то числа $(x_1 - 2)(x_2 - 3)$ и $(x_1 - 3)(x_2 - 2)$ отрицательны. Значит,

$$x_1 x_2 - 3x_1 - 2x_2 + 6 < 0$$

и

$$x_1 x_2 - 2x_1 - 3x_2 + 6 < 0.$$

Сложив эти неравенства, получим:

$$2x_1 x_2 - 5(x_1 + x_2) + 12 < 0.$$

Так как, по теореме Виета, $x_1 + x_2 = -b$ и $x_1 x_2 = c$, то $2c + 5b + 12 < 0$, откуда получим доказываемое неравенство.

Задача 6. На параболе $y = x^2$ выбраны точки A, B, C, D так, что прямые AB и CD пересекаются на оси ординат (рис. 1). Найдите абсциссу точки D , если абсциссы точек A, B и C равны a, b и c соответственно.

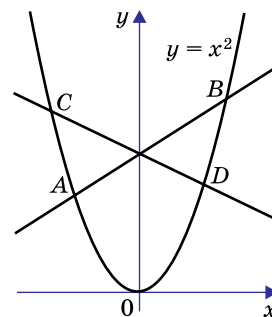


Рис. 1

Решение. Пусть прямые AB и CD пересекают ось Oy в точке $(0; q)$. Тогда прямые AB и CD могут быть заданы уравнениями

$$y = k_{AB}x + q \text{ и } y = k_{CD}x + q,$$

где k_{AB} и k_{CD} — угловые коэффициенты прямых AB и CD соответственно.

Абсциссы точек A и B являются корнями уравнения

$$x^2 - k_{AB}x - q = 0.$$

Применяя теорему Виета, получим, что

$$ab = -q.$$

Аналогично

$$cd = -q.$$

Значит,

$$cd = ab, \quad d = \frac{ab}{c}.$$

Задача 7. Прямая пересекает график функции $y = x^2$ в точках с абсциссами x_1 и x_2 , а ось абсцисс — в точке с координатой x_0 . Докажите, что

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_0}.$$

Решение. Пусть $y = kx + b$ — уравнение данной прямой (рис. 2). (На рисунке представлен частный случай, когда $k < 0$.) Тогда числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения

$$x^2 - kx - b = 0.$$

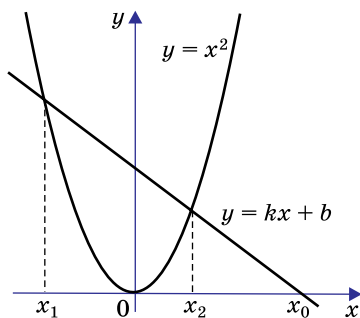


Рис. 2

Применяя теорему Виета, получим, что

$$x_1 + x_2 = k, \quad x_1 \cdot x_2 = -b.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{k}{b}.$$

Найдем абсциссу x_0 точки пересечения прямой $y = kx + b$ с осью Ox . Имеем, что

$$kx_0 + b = 0,$$

$$x_0 = -\frac{b}{k}, \quad \frac{1}{x_0} = -\frac{k}{b}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_0}.$$

Задача 8. В параболу $y = x^2$ вписан прямоугольный треугольник (то есть вершины треугольника лежат на параболе), гипотенуза которого параллельна оси Ox . Докажите, что высота треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C , вписанный в параболу $y = x^2$ (рис. 3).

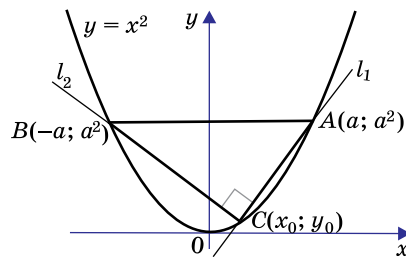


Рис. 3

Так как гипотенуза AB параллельна оси Ox , то координаты точек A и B имеют вид $A(a; a^2)$ и $B(-a; a^2)$, где a — некоторое положительное число. Пусть точка C имеет координаты $(x_0; y_0)$, причем $y_0 = x_0^2$. Через точку C проходят секущие l_1 и l_2 . Уравнения этих секущих можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} l_1: \quad y &= k_1(x - x_0) + y_0, \\ l_2: \quad y &= k_2(x - x_0) - y_0. \end{aligned}$$

Прямая l_1 и параболу пересекаются в точках с абсциссами x_0 и a . Применяя теорему Виета к уравнению $x^2 - k_1(x - x_0) - y_0 = 0$, получим, что $x_0 + a = k_1$.

Прямая l_2 пересекает параболу в точках с абсциссами x_0 и $-a$. Применяя теорему Виета к уравнению $x^2 - k_2(x - x_0) - y_0 = 0$, получим, что $x_0 - a = k_2$.

Так как прямые l_1 и l_2 перпендикулярны, то $k_1 k_2 = -1$, откуда:

$$(x_0 + a)(x_0 - a) = -1, \quad x_0^2 - a^2 = -1.$$

Принимая во внимание, что $y_0 = x_0^2$, получим:

$$a^2 - y_0 = 1.$$

Последнее равенство означает, что высота треугольника ABC , опущенная на гипотенузу, равна 1.

Задача 9. Угол, образованный лучами $y = x$ и $y = 2x$ при $x \geq 0$, высекает на параболе $y = x^2 + px + q$ две дуги. Эти дуги спроектированы на ось Ox . Докажите, что проекция левой дуги на 1 короче проекции правой.

Решение. Пусть прямая $y = x$ пересекает параболу $y = x^2 + px + q$ в точках с абсциссами x_1 и x_2 , где $x_1 < x_2$ (рис. 4).

Тогда числа x_1, x_2 являются корнями уравнения

$$x^2 + (p - 1)x + q = 0,$$

следовательно, по теореме Виета,

$$x_1 + x_2 = -(p - 1) = 1 - p.$$

Прямая $y = 2x$ пересекает параболу в точках с абсциссами x_3 и x_4 , где $x_3 < x_4$. Эти числа являются корнями уравнения

$$x^2 + (p - 2)x + q = 0.$$

Следовательно, по теореме Виета,

$$x_3 + x_4 = -(p - 2) = 2 - p.$$

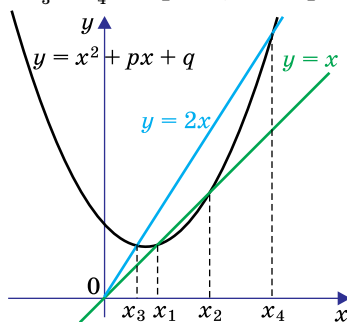


Рис. 4

При данных обозначениях проекция левой дуги параболы имеет длину $(x_1 - x_3)$, а длина дуги правой проекции $(x_4 - x_2)$. Таким образом, их разность равна

$$(x_4 - x_2) - (x_1 - x_3) = (x_3 + x_4) - (x_1 + x_2) = 2 - p - (1 - p) = 1.$$

Задача 10. Рассматриваются все возможные параболы $y = x^2 + px + q$, пересекающиеся с осями координат в трех различных точках. Докажите, что окружности, описанные около треугольника с вершинами в этих точках, имеют общую точку.

Решение. Пусть O — начало координат, $A(x_1; 0)$ и $B(x_2; 0)$ — точки пересечения параболы с осью Ox , $C(0; q)$ — точка пересечения параболы с осью Oy . Рассмотрим окружность, описанную около треугольника ABC . Пусть она вторично пересекает ось Oy в точке $D(0; d)$. Возможны два случая.

1. Точка O находится внутри построенной окружности (рис. 5). Следовательно, $x_1 x_2 < 0$ и $qd < 0$.

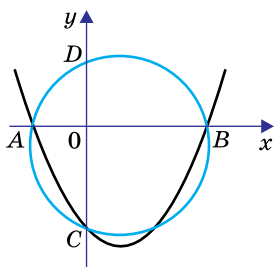


Рис. 5

Применяя теорему об отрезках пересекающихся хорд, получим, что

$$|OA| \cdot |OB| = |OC| \cdot |OD|.$$

Значит,

$$|x_1| \cdot |x_2| = |d| \cdot |q|.$$

Так как произведения $x_1 x_2$ и qd отрицательны, то $x_1 x_2 = qd$. Поскольку числа x_1, x_2 являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$, то, по теореме Виета, $x_1 x_2 = q$. Учитывая предыдущее равен-

ство, получим, что $d = 1$. Таким образом, координаты точки D не зависят от p и q .

2. Точка O находится вне окружности (рис. 6).

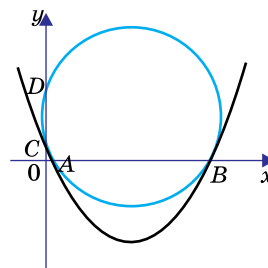


Рис. 6

Применяя свойство секущих, проведенных из одной точки, получим, что

$$|OA| \cdot |OB| = |OC| \cdot |OD|.$$

Значит, все окружности проходят через точку $D(0; 1)$.

Теорема Виета для многочленов третьей степени

Теорема. Пусть числа x_1, x_2, x_3 — корни многочлена третьей степени

$$x^3 + px^2 + qx + r. \quad (*)$$

Тогда справедливы формулы Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -p, \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = q, \\ x_1 x_2 x_3 = -r. \end{cases} \quad (**)$$

Обратная теорема также справедлива. Если числа x_1, x_2, x_3 удовлетворяют системе (**), то они являются корнями многочлена (*).

Идея доказательства этих двух теорем такая же, как и у прямой и обратной теорем Виета для квадратного трехчлена.

Замечание. Если многочлен имеет кратные корни, то каждый корень считается столько раз, какова его кратность. Например, корнями многочлена $(x - 5)^2(x - 7)$ являются числа $x_1 = x_2 = 5$, $x_3 = 7$.

Также мы не будем применять теорему Виета в том случае, когда количество действительных корней меньше степени многочлена.

Задача 11. Найдите сумму $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, если известно, что три различных действительных числа x, y и z удовлетворяют условиям:

$$x^3 + 1009 = 2018x, \quad y^3 + 1009 = 2018y, \quad z^3 + 1009 = 2018z.$$

Решение. Заметим, что числа x, y и z являются корнями уравнения

$$t^3 - 2018t + 1009 = 0.$$

Применяя к полученному уравнению теорему Виета, найдем:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 0, \\xy + xz + yz &= -2018, \\xyz &= -1009.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy + xz + yz}{xyz} = \frac{-2018}{-1009} = 2.$$

Задача 12. Пусть a , b и c — три различных числа. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}z + ay + a^2x + a^3 = 0, \\z + by + b^2x + b^3 = 0, \\z + cy + c^2x + c^3 = 0\end{cases}$$

относительно неизвестной тройки чисел $(x; y; z)$.

Решение. Числа a , b и c являются корнями многочлена $t^3 + xt^2 + yt + z$. Коэффициенты этого многочлена можно найти по формулам Виета:

$$\begin{cases}x = -(a + b + c), \\y = ab + bc + ca, \\z = -abc.\end{cases}$$

Задача 13. Найдите площадь треугольника, длины сторон которого являются корнями уравнения

$$x^3 - 10x^2 + 31x - 29 = 0.$$

Решение. Пусть a , b , c — корни данного уравнения. Применяя теорему Виета, получим:

$$\begin{aligned}a + b + c &= 10, \\ab + ac + bc &= 31, \\abc &= 29.\end{aligned}$$

Площадь треугольника найдем по формуле Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Учитывая, что

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{10}{2} = 5,$$

получим:

$$\begin{aligned}S &= \sqrt{5(5-a)(5-b)(5-c)} = \\&= \sqrt{5(125 - 25(a+b+c) + 5(ab+ac+bc) - abc)} = \\&= \sqrt{5(125 - 25 \cdot 10 + 5 \cdot 31 - 29)} = \sqrt{5}.\end{aligned}$$

Заметим, что в этой задаче не требуется проверять, что треугольник, длины сторон которого являются корнями данного уравнения, существует.

Таким образом, $S = \sqrt{5}$.

Задача 14. Найдите значение параметра a , если действительные корни уравнения

$$x^3 - 6x^2 - 2x + a = 0$$

образуют арифметическую прогрессию.

Решение. Пусть корни x_1 , x_2 , x_3 данного уравнения в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Применяя характеристическое свойство арифметической прогрессии, получим, что

$$x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}, \quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.$$

Применим к данному уравнению одну из формул Виета. Имеем:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6.$$

Вычитая первое соотношение из второго, найдем:

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + x_3) - (x_1 - 2x_2 + x_3) &= 6, \\3x_2 &= 6, \quad x_2 = 2.\end{aligned}$$

Значение параметра a получим, подставив найденный корень в уравнение:

$$\begin{aligned}2^3 - 6 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + a &= 0, \\a &= 20.\end{aligned}$$

Однако решение задачи не завершено. Необходимо проверить, что при данном значении a уравнение имеет три корня, причем

$$x_1 + x_3 = 2x_2 = 4.$$

Для этого разложим $x^3 - 6x^2 - 2x + 20$ на множители. Выполнить такое разложение не составляет труда, так как нам известен один из корней: $x_2 = 2$.

$$\begin{aligned}x^3 - 6x^2 - 2x + 20 &= \\&= x^3 - 2x^2 - 4x^2 + 8x - 10x + 20 = \\&= x^2(x-2) - 4x(x-2) - 10(x-2) = \\&= (x-2)(x^2 - 4x - 10).\end{aligned}$$

Замечание. Данное разложение можно получить, разделив многочлен $x^3 - 6x^2 - 2x + 20$ на двучлен $(x-2)$ уголком или применяя схему Горнера.

Числа x_1 и x_3 являются корнями уравнения $x^2 - 4x - 10 = 0$. Последнее уравнение имеет два корня, так как его дискриминант

$$D = 4^2 - 4 \cdot (-10) = 56 > 0,$$

причем, по теореме Виета, $x_1 + x_3 = 4$. Таким образом, найденное значение $a = 20$ удовлетворяет всем условиям задачи.

Задача 15. Найдите значение параметра b , если известно, что уравнение

$$x^3 + 6x^2 - 24x + b = 0$$

имеет три действительных корня, образующих геометрическую прогрессию.

Решение. Пусть корни x_1 , x_2 , x_3 данного уравнения в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Применяя характеристическое свойство геометрической прогрессии, получим: $x_2^2 = x_1x_3$.

Применим к данному уравнению одну из формул Виета. Имеем: $x_1x_2x_3 = -b$. Так как $x_1x_3 = x_2^2$, то

$$x_1x_2x_3 = (x_1x_3) \cdot x_2 = x_2^2 \cdot x_2 = x_2^3 = -b.$$

Подставим корень x_2 в уравнение и воспользуемся тем, что $x_2^3 = -b$. Получим:

$$x_2^3 + 6x_2^2 - 24x_2 + b = -b + 6x_2^2 - 24x_2 + b = 6x_2^2 - 24x_2 = 0.$$

Таким образом, $6x_2(x_2 - 4) = 0$. В случае $x_2 = 0$ получим, что $b = 0$ и числа $x_1, 0, x_3$ не образуют геометрической прогрессии. Значит, $x_2 = 4$, откуда

$$b = -x_2^3 = -4^3 = -64.$$

Осталось убедиться, что полученное уравнение

$$x^3 + 6x^2 - 24x - 64 = 0$$

имеет три корня. При этом соотношение $x_2^2 = x_1 x_3$ будет выполняться автоматически. Действительно, по теореме Виета, $x_1 x_2 x_3 = 64$. Так как $x_2 = 4$, то $x_1 x_3 = 16$, значит, $x_2^2 = x_1 x_3$.

Выполним деление уголком многочлена $x^3 + 6x^2 - 24x - 64$ на двучлен $(x - 4)$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 6x^2 - 24x - 64 & x - 4 \\ \hline x^3 - 4x^2 & \\ \hline 10x^2 - 24x & \\ 10x^2 - 40x & \\ \hline 16x - 64 & \\ 16x - 64 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Таким образом, числа x_1, x_3 удовлетворяют уравнению $x^2 + 10x + 16 = 0$, которое имеет корни -2 и -8 .

Найденное значение $b = -64$ удовлетворяет всем условиям задачи. Три корня полученного уравнения образуют геометрическую прогрессию: $-2, 4, -8$ или $-8, 4, -2$.

Задача 16. Докажите, что если

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c},$$

то среди чисел a, b, c есть два противоположных.

Решение. Пусть числа a, b и c являются корнями уравнения

$$x^3 + px^2 + qx + r. \quad (*)$$

Тогда, по теореме Виета,

$$a + b + c = -p, ab + bc + ca = q, abc = -r.$$

Преобразовав условие, получим, что

$$(a + b + c)(ab + bc + ca) = abc,$$

откуда

$$r = -abc = -(a + b + c)(ab + bc + ca) = pq.$$

Таким образом, уравнение $(*)$ можно записать в виде

$$x^3 + px^2 + qx + pq = 0.$$

Заметим, что $x = -p$ является корнем этого уравнения. Следовательно, число $-p$ совпадает с одним из чисел a, b или c . Так как сумма $a + b + c = -p$ и одно из этих чисел равно $-p$, то сумма двух оставшихся равна 0 . Эти два числа и будут противоположными.

Задача 17. Две прямые, параллельные оси Ox , пересекают график функции

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d:$$

первая — в точках A, D и E , вторая — в точках B, C и F (рис. 7). Докажите, что длина проекции дуги CD на ось Ox равна сумме длин проекций дуг AB и EF .

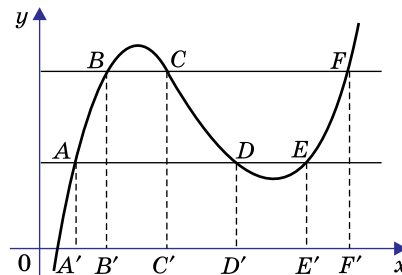


Рис. 7

Решение. Пусть $y = p$ и $y = q$ — уравнения проведенных прямых. Тогда:

абсциссы точек A, D и E — корни $x_1 < x_2 < x_3$ уравнения

$$ax^3 + bx^2 + cx + d - p = 0,$$

абсциссы точек B, C и F — корни $X_1 < X_2 < X_3$ уравнения

$$aX^3 + bX^2 + cX + d - q = 0.$$

Применяя теорему Виета к этим уравнениям, получим:

$$x_1 + x_2 + x_3 = X_1 + X_2 + X_3 = -\frac{b}{a},$$

откуда

$$x_2 - X_2 = (X_1 - x_1) + (X_3 - x_3).$$

Таким образом,

$$C'D' = A'B' + E'F'.$$

Утверждение доказано.

Симметрические системы

Рассмотрим еще одно важное применение обратной теоремы Виета. С ее помощью, как правило, решаются симметрические системы уравнений.

Замечание. Система уравнений называется симметрической, если она не меняется при любой перестановке переменных.

Пусть задана симметрическая система уравнений с неизвестными x, y, z . Сделаем замену переменных:

$$\begin{aligned} u &= x + y + z, \\ v &= xy + yz + xz, \\ w &= xyz. \end{aligned}$$

Если найдены значения u, v, w , то составляется кубическое уравнение

$$t^3 - ut^2 + vt - w = 0.$$

Согласно обратной теореме Виета корни t_1, t_2, t_3 этого уравнения в различных перестановках являются решениями исходной системы. Очень

часто в таких системах удобно пользоваться следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= u^2 - 2v, \\ x^3 + y^3 + z^3 &= u^3 - 3uv + 3w.\end{aligned}$$

В качестве простого упражнения читателю предлагается доказать эти соотношения.

Задача 18. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x + y + z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8.\end{cases}$$

Решение. Данная система уравнений является симметрической относительно переменных x, y, z . Положим:

$$\begin{aligned}u &= x + y + z, \\ v &= xy + yz + xz, \quad w = xyz.\end{aligned}$$

Относительно новых неизвестных система примет вид

$$\begin{cases}u = 2, \\ u^2 - 2v = 6, \\ u^3 - 3uv + 3w = 8.\end{cases}$$

Решая полученную систему, находим: $u = 2$, $v = -1$, $w = -2$. Составим кубическое уравнение $t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0$.

Разложим левую часть уравнения на множители. Имеем:

$$\begin{aligned}t^2(t - 2) - 1(t - 2) &= 0, \\ (t^2 - 1)(t - 2) &= 0, \\ (t - 1)(t + 1)(t - 2) &= 0.\end{aligned}$$

Полученное кубическое уравнение имеет три различных корня: $t_1 = 1$, $t_2 = -1$, $t_3 = 2$. Различные перестановки этих корней дают шесть решений исходной системы уравнений: $(1; -1; 2)$, $(1; 2; -1)$, $(-1; 1; 2)$, $(-1; 2; 1)$, $(2; -1; 1)$, $(2; 1; -1)$.

Задача 19. Числа a, b и c удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases}a + b + c = 1, \\ a^3 + b^3 + c^3 = 1.\end{cases}$$

Докажите, что по крайней мере одно из них равно 1.

Решение. Введем новые переменные:

$$u = a + b + c, \quad v = ab + bc + ac, \quad w = abc.$$

Относительно новых переменных система примет вид

$$\begin{cases}u = 1, \\ u^3 - 3uv + 3w = 1,\end{cases}$$

откуда получим, что $w - v = 0$. Составим кубическое уравнение, корнями которого являются числа a, b и c . Имеем:

$$t^3 - t^2 + vt - w = 0.$$

Число $t = 1$ является корнем данного уравнения. Значит, по крайней мере одно из чисел a, b или c равно 1.

Задача 20. а) Известно, что

$$\begin{cases}x + y = a + b, \\ x^2 + y^2 = a^2 + b^2.\end{cases}$$

Докажите, что при любом натуральном n выполняется равенство

$$x^n + y^n = a^n + b^n.$$

б) Известно, что

$$\begin{cases}x + y + z = a + b + c, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3 + b^3 + c^3.\end{cases}$$

Докажите, что при любом натуральном n выполняется равенство

$$x^n + y^n + z^n = a^n + b^n + c^n.$$

Решение. а) Применяя обратную теорему Виета, можно показать, что пары чисел x, y и a, b являются корнями одного и того же квадратного уравнения. Таким образом, числа x, y с точностью до перестановки совпадают с числами a, b . В пункте «б» мы подробно докажем аналогичный факт для двух троек чисел и кубического уравнения.

б) Обозначим:

$$u = x + y + z, \quad v = xy + yz + xz, \quad w = xyz.$$

Тогда числа x, y, z являются корнями уравнения

$$t^3 - ut^2 + vt - w = 0.$$

Аналогично введем:

$$\begin{aligned}U &= a + b + c, \\ V &= ab + bc + ac, \\ W &= abc.\end{aligned}$$

При этом числа a, b, c являются корнями уравнения

$$t^3 - Ut^2 + Vt - W = 0.$$

После введения новых переменных исходную систему можно записать в виде

$$\begin{cases}u = U, \\ u^2 - 2v = U^2 - 2V, \\ u^3 - 3uv + 3w = U^3 - 3UV + 3W,\end{cases}$$

откуда легко получить, что

$$u = U, \quad v = V, \quad w = W.$$

Таким образом, числа x, y, z и числа a, b, c являются корнями одного и того же уравнения. Следовательно, они совпадают с точностью до перестановки, и

$$x^n + y^n + z^n = a^n + b^n + c^n.$$

Рассмотрим задачу, в которой теорема Виета помогает доказать тригонометрическое равенство.

Задача 21. Докажите, что
 $\operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 80^\circ = 3\sqrt{3}$.

Решение. Найдем значение $\operatorname{tg} 3x$ при $x_1 = 20^\circ$, $x_2 = -40^\circ$ и $x_3 = 80^\circ$. Имеем:

$$\operatorname{tg} 3x_1 = \operatorname{tg} (3 \cdot 20^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg} 3x_2 = \operatorname{tg} (-3 \cdot 40^\circ) = \operatorname{tg} (-120^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg} 3x_3 = \operatorname{tg} (3 \cdot 80^\circ) = \operatorname{tg} 240^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

Справедливо тождество

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}.$$

Следовательно, числа

$t_1 = \operatorname{tg} 20^\circ$, $t_2 = \operatorname{tg} (-40^\circ) = -\operatorname{tg} 40^\circ$, $t_3 = \operatorname{tg} 80^\circ$ являются корнями уравнения

$$\frac{3t - t^3}{1 - 3t^2} = \sqrt{3},$$

преобразовав которое, получим:

$$t^3 - 3\sqrt{3}t^2 - 3t + \sqrt{3} = 0.$$

Применим к последнему уравнению теорему Виета. Тогда

$$t_1 + t_2 + t_3 = 3\sqrt{3},$$

откуда

$$\operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 80^\circ = 3\sqrt{3}.$$

Утверждение доказано.

Теорема Виета для многочленов n -й степени

Теорема. Пусть числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ — корни многочлена n -й степени

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n.$$

Тогда справедливы формулы Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}, \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_2}{a_0}, \\ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -\frac{a_3}{a_0}, \\ \dots \\ x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0} \end{cases} \quad (*)$$

(левая часть k -го равенства представляет собой сумму всевозможных произведений, состоящих из k различных элементов из набора $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$; знаки в правой части чередуются).

Обратная теорема также справедлива. Если числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ удовлетворяют системе (*), тогда они являются корнями многочлена

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n.$$

Замечание, приведенное после формулировки теоремы для многочлена третьей степени, остается справедливым и сейчас.

Мы не будем подробно рассматривать применение этой теоремы. Это выходит за рамки данной статьи. Приведем пример одной задачи, связывающей корни многочлена и корни его производной.

Задача 22. Многочлен

$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ степени $n > 1$ имеет n различных корней. Докажите, что среднее арифметическое корней этого многочлена равно среднему арифметическому корней его производной.

Замечание. В курсе математического анализа доказывается, что между любыми двумя корнями многочлена лежит корень его производной. Таким образом, если многочлен степени n имеет n различных действительных корней, то производная, которая является многочленом $(n-1)$ -й степени, имеет $(n-1)$ корень.

Решение. По теореме Виета, сумма корней многочлена $P(x)$ равна $-\frac{a_1}{a_0}$. Следовательно, $-\frac{a_1}{na_0}$ является средним арифметическим корней многочлена. Запишем производную:

$$P'(x) = na_0 x^{n-1} + (n-1)a_1 x^{n-2} + (n-2)a_2 x^{n-3} + \dots + a_{n-2} x + a_{n-1}.$$

Так как производная имеет $(n-1)$ корень, то, по теореме Виета, их сумма равна $-\frac{(n-1)a_1}{na_0}$, а среднее арифметическое равно

$$-\frac{(n-1)a_1}{(n-1)na_0} = -\frac{a_1}{na_0}.$$

Таким образом, утверждение доказано.

Частным случаем этой теоремы является тот факт, что абсцисса вершины параболы равна полусумме корней квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ (если эти корни есть):

$$x_B = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

Литература

1. Агаханов Н.Х. и др. Всероссийские олимпиады школьников по математике, 1993–2006: Окружной и финальный этапы. — М.: МЦНМО, 2007. 2. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Муниципальные олимпиады Московской области по математике. — М.: МЦНМО, 2019. 3. Алтуфова Н.Б., Устинов А.В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. — М.: МЦНМО, 2018. 4. Болтынский В.Г., Виленкин Н.Я. Симметрия в алгебре. — 2-е изд. — М.: МЦНМО, 2002. 5. Деревянкин А.В. Пять тем из школьной алгебры. Теория и задачи. — М.: МЦНМО, 2015.

ЗАДАЧА-ШАРАДА

■ Людмила Ивановна твердо решила посвящать внука-девятиклассника в свою работу над доступными ему задачами из тренировочных работ к ЕГЭ. Принцип «Чтобы получить 5, надо учиться на 6» был ей очень понятен. К тому же самоуважение Анатолия заметно повысилось: его авторитет среди одноклассников рос как на дрожжах при рассказах об этих задачах.

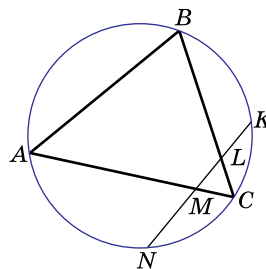
Вот и снова шестнадцатая из «alexlarin.net 2020 ЕГЭ профильный 331».

16. В треугольнике ABC $AB = 3$, $\angle ACB = \arcsin \frac{3}{5}$. Хорда KN окружности, описанной около треугольника ABC , пересекает отрезки AC и BC в точках M и L соответственно. Известно, что $\angle ABC = \angle CML$, площадь четырехугольника $ABLM$ равна 2, $LM = 1$.

- Докажите, что треугольник KNC равнобедренный.
- Найдите площадь треугольника KNC .

После разъяснения условия с арксинусом текст был передан Толе для работы. Началось с просьбы сделать чертеж и кратко записать условие, нумеруя все данные.

Толя, привыкший к установленным требованиям, сделал это так.



Дано:

- $\triangle ABC$ вписанный;
- $AB = 3$;
- $\sin \angle C = \frac{3}{5}$, $\angle C$ острый;
- $\angle ABC = \angle CML$;
- $S_{ABLM} = 2$;
- $LM = 1$.

Требуется:

- доказать, что $\triangle KNC$ равнобедренный;
- найти S_{KNC} .

– Что заметил? — спросила Людмила Ивановна.

– Да вот в треугольнике ABC даны сторона и синус противоположного угла. Значит, по теореме синусов можно найти радиус описанного круга. Это будет два с половиной.

– Хорошо. Это требуется найти?

– Нет. Там только про треугольник KNC .

– Тогда запишем это как новое известное нам условие, под номером 7. А про треугольник KNC ничего не увидел?

– Нет.

– Ну, значит, ходов от того, что требуется найти, пока нет. Будем продолжать анализ того, что дано. Что в данных самое привлекательное для размышлений?

– Углы.

– И что же про них известно?

– Угол ABC равен углу CML .

– А что это за углы?

– Один — вписанный, а другой — угол треугольника.

– Это меня не устраивает. Нет ли между ними чего-то общего?

– Как это?

– Ну, скажем, это углы одного и того же треугольника, или двух треугольников, или один из углов вписанный, а другой угол...

– А другой — угол с вершиной внутри круга?

– Прекрасно. Так с чего начнем?

– С того, что почуднее. С окружности. Угол ABC измеряется половиной дуги AC . Угол CML — полусуммой дуг AN и CK .

– Пиши.

– Толя написал:

$$\sphericalangle AC = \sphericalangle AN + \sphericalangle CK.$$

– И что отсюда следует? — спросила Людмила Ивановна. — Посмотри на чертеж.

– Что

$$\sphericalangle AN + \sphericalangle NC = \sphericalangle AN + \sphericalangle CK.$$

– Ой, да ведь $\sphericalangle NC = \sphericalangle CK$! А это уже то, что требуется в задаче «а»!

– Вот видишь, какая это задача. Расшифровывая условие, мы добрались до того, что требовалось. Попробуем и дальше так. Что там у нас?

– А не получится ли что-нибудь из равенства тех же углов как углов треугольника? — догадался Толя. — Напишу я, как ты меня учила, это равенство, но вместо знаков углов буду писать знаки треугольников. И подчеркну вершины равных углов.

И он написал: $\triangle ABC \sim \triangle CML$, — и заметил:

– Тут еще углы C имеются. — И посмотрел на чертеж: «Ох, да C — это один и тот же угол!» Значит, треугольники подобны по двум углам!»

– А вот записаны они здесь неудобно.

– Да, конечно, конечно.

И Толя переписал последнюю строчку так, чтобы вершины равных углов оказались на одинаковых местах:

$$\triangle ABC \sim \triangle LMC.$$

И продолжил:

$$\frac{AB}{LM} = \frac{AC}{LC} = \frac{BC}{MC};$$

$$\frac{3}{1} = \frac{AC}{LC} = \frac{BC}{MC}.$$

– Что же получилось? — спросила Людмила Ивановна.

– Непонятно. В задаче «б» мне нужен треугольник KNC , а здесь о нем ни слова.

– Значит, мы пока только накапливаем факты.

И запись условий пополнилась:

$$8) \triangle ABC \sim \triangle LMC, k = 3.$$

– Это я так обозначил коэффициент подобия.

– Отлично! — похвалила бабушка. — А дальше что? Видишь?

– Продолжаем анализ данных? Тут еще одно осталось — про площадь.

– Вот-вот! И как ты мне это объяснишь?

– Если от площади треугольника ABC отнять одну девятую ее часть, то останется площадь, равная 2.

– Молодчина! Что отсюда получается?

– Сейчас посчитаю! Получается, что площадь ABC равна 2,25, а площадь LMC равна 0,25.

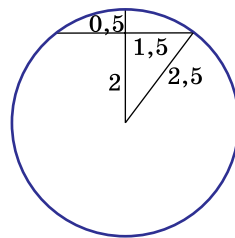
– Ну а теперь сравни с тем, что тебе нужно.

– А мне нужна площадь треугольника KNC . Так у них же общая высота, и я ее нахожу из треугольника LMC . У него основание 1, а площадь одна четвертая. Значит, высота равна одной второй.

– Дальше ясно?

– Да, — сказал Толя.

Он начертил окружность радиуса 2,5, провел в ней хорду на расстоянии 2 от центра и получил египетский треугольник со стороной 1,5.



– Ответ: 0,75, — сказал он. — Правда, не задача, а детектив.

– По крайней мере, похожа на шараду, — улыбнулась Людмила Ивановна.

Е. ИВАНОВА,
г. Москва

КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД В ПЛАНИМЕТРИИ

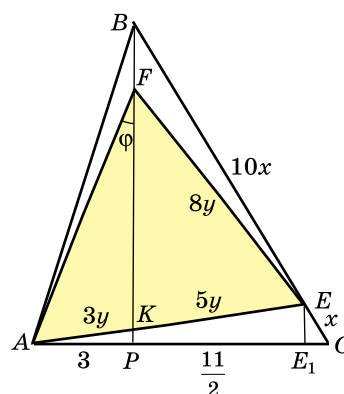
■ Недавно на сайте А. Ларина (<http://alexlarin.net/ege21.html>) была опубликована планиметрическая задача, которую удобно решать координатным методом. Это задача № 166 из тренировочного варианта 336 подготовки к ЕГЭ. Она вполне доступна девятиклассникам. Показать на ней координатный метод полезно, потому что этот важный метод редко используется в курсе планиметрии. Приведем текст задачи и то ее решение, которое опубликовано на упомянутом сайте, а потом покажем, как она решается с помощью координат.

Точки E и F расположены соответственно на стороне BC и высоте BP остроугольного треугольника ABC так, что

$$AP = 3, PC = \frac{11}{2}, BE : EC = 10 : 1,$$

а треугольник AEF является равносторонним.

- Докажите, что ортогональная проекция точки E на сторону AC делит отрезок AC в отношении $1 : 16$, считая от вершины C .
- Найдите площадь треугольника AEF .



Решение. а) Высота BP перпендикулярна стороне AC , E_1 — ортогональная проекция точки E на AC , то есть отрезок EE_1 перпендикулярен стороне AC .

Пусть $EC = x$, тогда $BE = 10x$. Треугольники CEE_1 и CBP подобны по двум углам,

$$k = \frac{CE}{CB} = \frac{1}{11}, CE_1 = \frac{1}{11} CP = 0,5.$$

Тогда

$$PE_1 = 5, AE_1 = 8; \\ CE_1 : AE_1 = 0,5 : 8 = 1 : 16.$$

- Отрезок KP параллелен EE_1 , $AP = 3$, $PE_1 = 5$, тогда $AK = 3y$, $KE = 5y$, $AF = AE = FE = 8y$.

В треугольнике $FAK \angle FAK = 60^\circ$, так как треугольник AFE равносторонний. Пусть $\angle AFK = \varphi$. По теореме косинусов

$$FK = \sqrt{AF^2 + AK^2 - 2AF \cdot AK \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{64y^2 + 9y^2 - 24y^2} = 7y.$$

По теореме синусов

$$\frac{AK}{\sin \varphi} = \frac{FK}{\sin 60^\circ} \cdot \frac{3y}{\sin \varphi} = \frac{7y}{\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

откуда $\sin \varphi = \frac{3\sqrt{3}}{14}$:

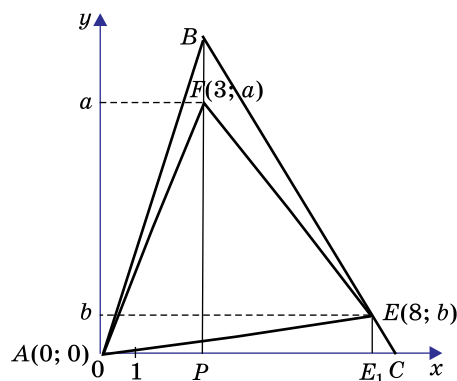
$$AF = \frac{AP}{\sin \varphi} = \frac{3}{\frac{3\sqrt{3}}{14}} = \frac{14}{\sqrt{3}}.$$

$$S_{AFE} = \frac{AF^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{196\sqrt{3}}{3 \cdot 4} = \frac{49\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{49\sqrt{3}}{3}$.

Задачу можно решить и другим путем — с применением обобщенной теоремы Фалеса к прямым BC и AC , пересеченным двумя параллельными прямыми BP и EE_1 . Но самое главное — задачу «б» можно решить координатным методом.

Введем прямоугольную систему координат, расположив начало координат в точке A и разместив на оси абсцисс точку P с координатой 3. Тогда, учитывая, что длины отрезков AP и AE_1 равны соответственно 3 и 8, получим, что абсциссой точки E_1 окажется число 8. Обозначим длины отрезков FP и EE_1 соответственно через a и b . Координаты вершин интересующего нас треугольника AFE окажутся равными $A(0; 0)$, $F(3; a)$, $E(8; b)$.



Треугольник AFE равносторонний (по условию), поэтому длины отрезков AF , AE и FE равны

$$\sqrt{(3-0)^2 + (a-0)^2} = \sqrt{(8-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{(3-8)^2 + (a-b)^2}.$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 9 + a^2 = 64 + b^2, \\ 9 + a^2 = 25 + (a-b)^2. \end{cases}$$

Площадь равностороннего треугольника равна $\frac{x^2 \sqrt{3}}{4}$, поэтому, решая эту систему, достаточно найти a^2 или b^2 , чтобы затем по теореме Пифагора найти AF^2 или AE^2 :

$$a^2 = \frac{169}{3}, \quad AF^2 = \frac{196}{3}.$$

$$S_{AEF} = AF^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{196}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{49\sqrt{3}}{3}.$$

Было бы очень полезно не только показать десятиклассникам это решение, но и сопоставить его с данным на сайте.

Из интернета

Жюри Всероссийской олимпиады школьников обвинили в провокации

<https://www.mk.ru/amp/social/2020/11/23/zhyuri-vserossiyskoy-olimpiady-shkolnikov-obvinili-v-provokacii.html>

21 ноября в Санкт-Петербурге прошел муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике. Из-за коронавирусных ограничений школьники выполняли задания, находясь дома или в классе без контроля со стороны педагогов. Естественно, в таких условиях некоторые пытались отыскать правильные ответы в Сети, к тому же решения задач уже через полчаса появились на одном из популярных ресурсов. Однако, как выяснилось позднее, эти решения оказались неверными. Причем на сайт их специально загрузили сами организаторы мероприятия, чтобы поймать с поличным нерадивых участников.

Целью жюри было оценить масштаб проблемы и деанонимизировать участников, которые списали решение из интернета. При этом подобная мера не нова и уже использовалась при борьбе со списыванием на ЕГЭ.

Тем временем действия членов жюри вызвали бурную реакцию общественности. Некоторые даже обвинили жюри в провокации и неуважении к участникам олимпиады, ведь бессовестное поведение детей еще не повод для такого же нечестного ответа со стороны взрослых. Однако многие родители, наоборот, выступили на стороне организаторов муниципального этапа и поддержали их желание наказать нечестных участников.

А. ШЕВКИН,
г. Москва

10–11 классы

ВОЗЬМЕМ ИНТЕГРАЛ ИЛИ... НОЖНИЦЫ

■ Рассмотрим задачу из книги В.В. Ткачука¹ на вычисление площади фигуры, ограниченной линиями на координатной плоскости.

1. Найдите площадь фигуры, задаваемой на координатной плоскости двойным неравенством

$$x - |1 - x^2| + |x| + |3x - 3| + |x + 1| - 7 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}.$$

Решение. Изобразим все точки $(x; y)$ в системе координат xOy , координаты которых удовлетворяют двойному неравенству. Здесь $x \in [-2; 2]$.

1. Сначала построим график функции

$$y = x - |1 - x^2| + |x| + |3x - 3| + |x + 1| - 7.$$

Модули обращаются в нуль в точках $-1, 0, 1$, разбивающих числовой отрезок $[-2; 2]$ на четыре промежутка. На каждом из них после раскрытия всех модулей получим квадратичную функцию. Концы промежутков $-1, 0, 1$ включаем в соседние промежутки для самоконтроля:

а) если $x \in [-2; -1]$, то $y = -(x + 2)^2$;

б) если $x \in [-1; 0]$, то $y = (x - 1)^2 - 5$;

в) если $x \in [0; 1]$, то $y = x^2 - 4$;

г) если $x \in [1; 2]$, то $y = -(x - 3)^2 + 1$.

Участки графиков, которые можно совместить наложением, показаны одним цветом.

2. Теперь построим график функции $y = \sqrt{4 - x^2}$.

Здесь $x \in [-2; 2]$, $y \geq 0$; после возведения в квадрат получим уравнение полуокружности $x^2 + y^2 = 4$ радиуса 2.

Двойному неравенству удовлетворяют все точки $(x; y)$, принадлежащие первому, или второму графику, или внутренней области, ограниченной этими графиками (рис. 1).

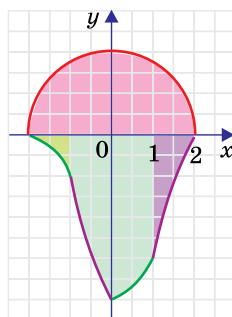


Рис. 1

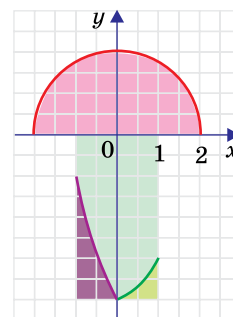


Рис. 2

Для вычисления площади закрашенной фигуры переместим ее части, как показано на рисунке 2. Получим «гриб». Площадь этой и исходной фигуры равна $2\pi + 8$.

Ответ: $2\pi + 8$.

¹ Ткачук В.В. Математика — абитуриенту. 20-е изд. — М.: МЦНМО, 2020.

А. ВОЛКОВА,
г. Москва



ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОРИГАМИ, ИЛИ ОПЫТЫ С БУМАГОЙ

■ Здравствуйте! Меня зовут Волкова Анна Алексеевна и я представляю инженерную школу № 1581 при МГТУ им. Баумана.

Все классы нашей школы, начиная с седьмого, являются инженерными. Хотя проект инженерных классов в московской школе подразумевает участие в нем учащихся 10-х и 11-х классов, но отечественные эксперты считают, что воспитание инженера составляет примерно семь лет и начало этого воспитания должно быть положено значительно раньше, чем в 10-м классе. За границей введение школьников в инженерную деятельность начинается уже в младшей школе. Поэтому мы решили начать воспитание будущих инженеров с 7-го класса. Наши 10–11-классники очень плотно взаимодействуют с МГТУ им. Баумана, они ездят туда на экскурсии и лабораторные занятия, на лекции и семинары и к концу 11-го класса чувствуют себя там уже как дома. Поэтому нам для углубленного изучения предметов остаются 7-е, 8-е и 9-е классы. Углубленно в нашей школе изучаются математика, физика, информатика, кроме того, в 7–8-х классах дети обязательно изучают черчение.

Что касается непосредственно инженерной направленности, мы считаем, что нужно развивать умение детей креативно мыслить: мало иметь хорошую базу знаний, нужно уметь еще эти знания применять в каких-то нестандартных ситуациях. Поэтому ежегодно мы устраиваем выездной семинар: на три-четыре дня выезжаем в Подмоскovie и там проводим занятия по разным предметам — математике, информатике, физике, русскому языку, литературе. Это в области инженерии, быть может, звучит странно, но тем не менее.

Вот у нас была тема «Мосты». И дети на физике рассматривали виды мостов, их возможные конструкции. А на литературе выясняли, какие мосты можно навести между разными авторами или различными произведениями этих авторов.

Много внимания в плане инженерного развития мы уделяем и русскому языку. Русский язык у нас активно используется, потому что порой дети не могут что-то сделать, создать какой-то объект по инструкции, а еще сложнее для них составить саму эту самую инструкцию. А это очень важно. Ведь для того, чтобы составить инструкцию, нужно алгоритмизировать свои действия и грамотно их изложить, чтобы человек, прочитав инструкцию, мог воспользоваться ею.

На выездных семинарах у нас проводятся еще и инженерные соревнования, когда из всяких стекляшек-промокашек, трубочек-стаканчиков и прочей непонятной ерунды дети создают вполне реальные конструкции: подъемные механизмы и насосы, мосты и летательные аппараты. И все это работает: поднимает воду или сыпучий груз, летает или плавает. То есть это совершенно реальные проекты, которые дети делают за полтора часа, а потом еще час отводится на защиту и демонстрацию своего детища.



Есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.



Еще одни соревнования, так называемые «большие инженерные», проводятся уже непосредственно в школе. Они проводятся силами студентов МГТУ им. Баумана (как правило, это наши выпускники).

Эти разовые мероприятия и занятия идут постоянно и составляют инженерный модуль. На инженерный модуль в системе дополнительного образования нам выделили один час. Поскольку мы учимся по триместрам, мы разделили этот курс на три части, и каждый триместр в классе «проходят» один небольшой модуль. Это может быть математика, информатика, может быть химия или русский язык. Разные, мы их меняем.

Остановлюсь на математике в 8-м классе. Чтобы дети научились что-то делать своими руками, чтобы в обычном увидели необычное или в необычном обычное, мы проводим курс «Геометрическое оригами, или Опыты с бумагой».

Начинаем с простых вещей. Возьмем, например, треугольник [1](#). В 7-м классе дети учатся с помощью циркуля и линейки строить биссектрисы, медианы, высоты, перпендикуляры, центры вписанной и описанной окружностей.

Все это мы можем найти в треугольнике и без всяких инструментов, например, разделить отрезок пополам. Мы сгибаем треугольник и делаем загиб [2](#) — вот у нас получилась середина.

Раз у нас есть середина стороны, то мы можем легко построить и медиану. Согнем треугольник вот так и получим, соответственно, медиану [3](#), [4](#).

Вот в треугольнике проведена медиана [5](#). Их можно провести три. Так мы получим точку пересечения медиан в треугольнике.

Теперь, опять же опытным путем, мы можем, разделив одну медиану пополам, убедиться в том, что точка пересечения медиан делит их в отношении $2 : 1$, считая от вершины. Вот точка пересечения медиан разделила медиану на три равные части [6](#), [7](#).

Если у нас есть медианы или середины сторон, мы можем построить средние линии в треугольнике.

Вот так все три средние линии в этом треугольнике можно получить [8](#), [9](#).

Теперь видно, что площадь треугольника, образованного средними линиями, составляет четверть от площади исходного треугольника.

Вот такие конструкции, связанные с медианами, мы можем показать детям.

Можно построить биссектрисы. Для этого нам нужно взять треугольник и сложить его таким образом, чтобы совпали стороны этого треугольника [10](#), [11](#). А если мы построим все три биссектрисы треугольника, то таким образом найдем центр вписанной в треугольник окружности. Да, мы умеем его строить циркулем и линейкой, а можем построить с помощью вот таких сгибов [12](#).

Если мы из этого центра опустим перпендикуляр, то есть сделаем сгиб вот таким образом, то найдем и радиус этой самой окружности [13](#), [14](#). Можно более наглядно (наверное, с другой стороны) сделать перпендикуляр так, чтобы отрезки совпали. Вот получился радиус этой самой вписанной окружности.

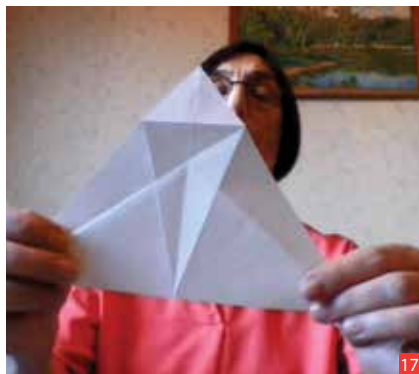
Аналогичные действия можем проделать и для высот. А как построить высоту в треугольнике? Для этого нужно через вершину треугольника сделать/провести сгиб так, чтобы соответствующие стороны при сгибе совпали. Вот этот перпендикуляр и есть высота треугольника [15](#), [16](#).

Если мы построим все три высоты [17](#), то... во-первых, мы построим ортоцентр этого треугольника [18](#), а во-вторых, мы можем убедиться в справедливости теоремы о том, что высоты в треугольнике с вершинами в основаниях высот являются биссектрисами углов этого треугольника. Действительно, если мы сложим треугольник вот таким образом, по этим же самым высотам, то мы убедимся в том, что действительно вот эти получившиеся углы равны [19](#), [20](#).





16



17



18

То есть мы получили наглядное подтверждение нашей теоремы.

Это самые простые вещи с треугольником, и это доступно учащимся 7-го класса, и в 8-м классе мы начинаем именно с этих заданий.

Есть другие задания, которые связаны с квадратом.

Возьмем квадрат и проведем в нем произвольную прямую. Вот она у меня отмечена синим цветом. Эта прямая отсекает угол квадрата, и у нас получились четыре отрезка на сторонах квадрата и две стороны квадрата, которые наша прямая не пересекла. Вот каждый из этих шести отрезков мы и совмещаем с нашей прямой-направляющей.

Берем первый отрезок, совмещаем его с нашей направляющей и делаем сгиб [21](#), [22](#). Берем следующий отрезок, совмещаем его с направляющей и делаем сгиб [23](#). Далее следующий отрезок совмещаем с нашей направляющей и делаем сгиб [24](#). Следующей у нас будет сторона. Сторону совмещаем с направляющей и делаем сгиб [25](#). Следующую сторону совмещаем с направляющей и делаем сгиб. Должно получиться шесть сгибов. Вот эти шесть сгибов пересекаются в нашем квадрате [26](#).

В зависимости от того, как мы проведем эту синюю прямую-направляющую, может получиться шесть точек пересечения, а может получиться меньше. Но если теперь в нашем квадрате проведем оси симметрии, то есть сложим его, совместив стороны, или сложим его по диагоналям, то все наши точки окажутся на осях симметрии квадрата.

Вот у меня квадрат со всеми осями симметрии. Вот у меня совпадает один отрезок, второй, третий, четвертый и две стороны: одна и вторая. Здесь я даже отметила эти точки, они все оказались на осях симметрии. Смотрите: вот эта точка лежит на оси симметрии и эта точка лежит на оси симметрии. Эта точка лежит на диагонали, а эта — на прямой, параллельной сторонам [27](#).

Это достаточно легко доказать, хотя поначалу, когда дети это делают, для них это кажется чудом, фокусом, это их и заинтересовывает, хотя выводы наши основаны исключительно на свойствах биссектрис. Когда мы прикладываем сторону к направляющей, мы фактически строим биссектрису вот этого угла [28](#). Далее мы строим вторую биссектрису. На их пересечении мы получили точку пересечения биссектрис. Значит, третья биссектриса треугольника тоже должна проходить через эту точку. А третья биссектриса — это как раз диагональ нашего квадрата [29](#).

Если рассмотреть остальные точки, то поскольку мы прикладывали стороны все к этому отрезку направляющей, то фактически строили биссектрисы некоторых углов. Вот в данном случае, например, линия является у нас биссектрисой угла, вершина которого находится вне квадрата.

Манипулируя с квадратами и треугольниками, мы, во-первых, что-то делаем руками, что очень важно. Кажется невероятным, но один раз в 7-м классе столкнулась с тем, что ребенок не умеет работать ножницами. (Прямо так честно и сказал: «Я не умею резать ножницами»; вот и приходится какие-то пробелы в умениях детей ликвидировать в школе.)

Во-вторых, они «собственноручно» получают совершенно неожиданные результаты. Это некая детективная история, которая заинтересовывает. В-третьих, повторяют свойства биссектрис или какие-то другие свойства, каких-то других геометрических объектов. Возьмем вот этот квадрат. У каждого же свое получается, у каждого свой направляющий отрезок был задан, поэтому и точки получились у каждого свои, но все равно они все оказались на осях симметрии квадрата. Это тоже важно. И, естественно, можно здесь задуматься... В определенном отношении, определенном положении этот отрезок проведен, какие здесь можно сделать выводы об этой конструкции. Это еще один повод для размышления.

Вторая задача с квадратом, которую я хочу показать, называется «Первая теорема Хаги» (это японец, который занимается как раз опытами с бумагой). Итак, представим себе, что у нас есть квадрат. Находим у него середину стороны, одну из его нижних вершин прикладываем к этой самой середине стороны и делаем сгиб. Получилась вот такая картина [30](#). У нас здесь получилось три прямоугольных треугольника. Так вот, оказывается, все эти треугольники египетские.

Рассмотрим вот этот угловой треугольник [31](#). У него один из катетов равен половине стороны, второй катет примем за x , тогда вот этот отрезок будет $(a - x)$. Но поскольку мы прикладываем этот отрезок вот сюда, то, соответственно, гипотенуза этого прямоугольного треугольника тоже будет $(a - x)$. Поскольку треугольник прямоугольный, в нем работает теорема Пифагора. Если мы запишем ее для нашего треугольника, то мы получим уравнение относительно x с параметром a . И в результате получится, что

$$x = \frac{3}{8}a.$$

Тогда $(a - x)$, поскольку a — это $\frac{8}{8}$, равно $\frac{8}{8} - \frac{3}{8}$, то есть $x = \frac{5}{8}$.

А вот этот катет у нас $\frac{a}{2}$, то есть это $\frac{4}{8}$.

И мы получаем треугольник с отношениями сторон $3 : 4 : 5$. А это как раз и есть египетский треугольник.

Если мы посмотрим на второй треугольник (вот этот) [32](#), то он тоже египетский, поскольку он подобен данному треугольнику по двум углам. Сумма острых углов равна 90° , поскольку мы из развернутого угла вычитаем вот этот прямой угол квадрата. Значит, сумма вот этих углов 90° и сумма острых углов этого треугольника 90° . То есть углы этих треугольников равны, следовательно, треугольники будут подобны. Раз треугольники подобны, мы можем написать соотношение между сторонами этих треугольников. И получим, что вот этот отрезок [33](#) треугольника составляет $\frac{2}{3a}$. Получается, что мы с вами таким образом

нашли точку (вот здесь [34](#), [35](#)) пересечения стороны, которую мы приложили, со стороной квадрата, которая делит сторону квадрата в отношении $2 : 1$, то есть вот этот отрезок — это $\frac{1}{3}$ стороны. Таким образом, мы разделили сторону квадрата на три равные части.

Как еще можно разделить сторону квадрата или прямоугольника на три равные части? Каждый квадрат — это два треугольника, на которые он делится диагональю. Если мы в этих тре-



19



20



21



22



23



24



угольниках проведем медианы, мы умеем это делать, то мы найдем их точку пересечения, которая делит медианы в отношении 1 : 3.

А дальше, используя теорему Фалеса, мы можем разделить квадрат на три равные части. Вот давайте посмотрим, как это сделать. Середина стороны у нас уже есть, проведем медиану (говорю «проведем», потому что делаю сгиб). Вот к середине стороны я провела медиану треугольника, который получается, если мы проведем диагональ. Дальше найдем середину второй стороны и проведем медиану к ней. Получилась точка пересечения медиан треугольника, если бы мы провели здесь диагональ. Значит, вот этот отрезок составляет $\frac{1}{3}$ медианы.

Если мы через эту точку проведем прямую, параллельную стороне, то на этой стороне мы тоже отметим $\frac{1}{3}$. Значит, согнем квадрат таким образом, чтобы этот сгиб был параллелен стороне. Вот мы разбили квадрат на три равные части ³⁶. Ровно так же можно провести горизонтальные линии в этом квадрате.

Если делать все это достаточно аккуратно, то все получается достаточно ровно. Вот видите: мы получили три маленьких квадрата, которые составляют девятую часть нашего квадрата. Таким образом, мы разделили квадрат на девять равных частей.

Используя бумагу, можно работать не только с прямолинейными фигурами, можно построить, например, эллипс. Мы возьмем круг, выберем на нем точку (подалее от центра, чтобы эллипс был более ярко выражен). На окружности отметим точки на расстоянии 1 см ³⁷. Таких точек должно быть много, тогда построение будет красивым, четким. А дальше будем делать вот что. Каждую из точек, которые у нас отмечены на окружности, сгибая квадрат вот таким образом, прикладываем к нашей точке, которую мы отметили. И делаем сгиб. И таким образом для каждой точки делаем сгиб. А если мы сделаем

аккуратно и много таких сгибов, то у нас получится аккуратный нетронутый ни одним сгибом эллипс ³⁸.

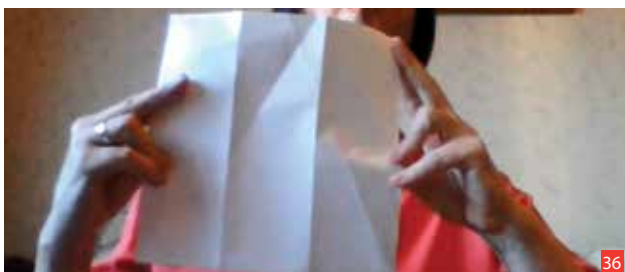
Также можно построить и параболу. Для этого возьмем прямоугольный лист бумаги, отметим на нем (лучше на длинной стороне) точки, с обратной стороны так же отметим точку (фокус-параболы) и начнем сгибать вот таким образом: точку намеченную с точкой на прямой ³⁸. Если мы проведем аккуратно все эти сгибы, у нас получится с вами аккуратный, незамятый фрагмент параболы.

Я привела примеры задач, которые можно решать с помощью бумаги. Такого материала на самом деле много. Можно, например, поработать с детьми на тему, как одним разрезом вырезать фигуру, то есть если мы хотим вырезать квадрат — это просто, а вот если мы хотим вырезать треугольник — это уже сложнее, а если фигура многоугольник, да еще произвольный, — еще сложнее. То есть все зависит от уровня подготовленности детей, от их желания работать, но эти занятия детям нравятся.

В конце модуля дети сдают зачет, они рассказывают, как разделить сторону квадрата на три части, как получить египетский треугольник, как построить центр вписанной или описанной окружности, то есть какие-то навыки свои они на зачете демонстрируют.

Вот, собственно, все, что я хотела рассказать, не занимая много времени. Поскольку аудитория подготовлена, я показала только идеи, а вы можете их дальше развивать. Понятно, что идеи эти я не придумала сама. Мы пользуемся книжками «Оригамика», «Одним разрезом» и другими книгами издательства МЦНМО, мы используем ресурсы сайта МЦНМО, «Матэюды», «Модели». На этих сайтах есть очень симпатичные мультики, которые детям нравятся и в то же время несут достаточно большой объем интересной информации.

Я вам желаю успеха в преподавании. До свидания.



Л. РОСЛОВА,
г. Москва

МЕЖДУНАРОДНЫЙ ОПЫТ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Цифровая трансформация образования за последний год превратилась в реальность и стремится стать повседневностью. В данной статье предлагается аналитический обзор:

- опыта цифровизации в странах Европейского союза (это представляет интерес, поскольку среди стран Европейского союза лидеры международного исследования PISA — Финляндия, Эстония);
- исследований ОЭСР в части цифровых образовательных программ (среди стран ОЭСР лидеры математического образования — Япония и Северная Корея);

а также анализ понятия цифровых учебных ресурсов применительно к математическому образованию.

Анализ опыта стран Европейского союза

Согласно исследованиям, европейская стратегия *первого поколения* в области цифрового обучения (до 2002 г.) была сосредоточена главным образом на развитии инфраструктуры: ключевыми здесь являлись два показателя — широкополосный доступ к интернету и соотношение числа обучающихся и компьютеров. Разработка содержания и структуры компетенций учащихся не была основной целью этого периода.

Стратегия *второго поколения* была сосредоточена на дополняющих этот подход политических мерах, таких как подготовка учителей, повышение их компетентности и разработка содержания образования. Стратегия цифрового обучения эволюционирует в направлении модели, в которой акцент смещается с собственно информационно-коммуникационных технологий (ИКТ) на те преимущества, которые ИКТ могут предложить обществу и экономике.

Анализ ситуации в Европе в 2011 году показал, что все страны разработали национальную политику в области ИКТ в образовании либо как самостоятельную политику, либо как часть более широкой национальной стратегии в области ИКТ. Стратегический акцент в этой политике делался на развитие цифровой компетентности обучающихся и разрабатывался на уровне национальных администраций. Тактические аспекты были сосредоточены на подготовке учителей и обеспечении школ современными

ми технологиями и инфраструктурой, они были децентрализованными, что позволяло местным администрациям и школам свободно экспериментировать и формировать свою собственную политику в рамках некоторых ключевых параметров, определяемых сверху. Национальные органы власти, в частности, стремились стимулировать более широкое использование цифровых технологий среди учителей по основным учебным предметам.

В докладе ОЭСР 2010 года было высказано предостережение, что политика цифрового обучения, обеспечивающая доступ к технологиям, но не обеспечивающая подготовку учителей и компетентность в преподавании с использованием этих технологий, может увековечить «второй цифровой разрыв». Имеется в виду разрыв между теми, кто обладает компетенцией извлекать выгоду из цифровых технологий, и теми, кто ее не имеет. В этой связи политика была пересмотрена: наибольшее политическое и исследовательское внимание стало уделяться роли учителей в интеграции цифровых технологий в образовательный процесс.

Однако исследование 2011 года выявило, например, что не более трети учащихся начальной школы и не более четверти учащихся основной школы обучаются в школах, где проводится активная политика в области цифрового обучения, а до трети учащихся обучаются в школах с низким уровнем цифровизации учебного процесса. Причина невысокого уровня цифровизации заключается в необязательности для учителей овладения навыками цифрового обучения и использования их в работе.

Современная политика *третьего поколения* в области цифрового обучения (после 2011 г.) разрабатывается с учетом более тесной увязки стратегического системного уровня политики с тактическим уровнем, с одной стороны, и сочетания развития педагогической компетентности с предоставлением цифровых устройств или ресурсов, с другой.

Приведем основные факторы современной европейской политики в области цифрового обучения.

1. Наращивание учительского потенциала. Признается решающей роль педагогов в поддержке интеграции цифровых технологий в образование. Ключевой фактор успеха — это способность учителей осмысленно интегрировать цифровые технологии в повседневную педагогическую практику, а неспособность — основной тормоз.

2. Использование различных путей наращивания потенциала в области преподавания. Су-

ществует единодушная озабоченность по поводу наращивания потенциала преподавания, при этом меры по формированию учительских компетенций расходятся, и многие страны объединяют различные стратегии, чтобы предложить учителям широкий спектр возможностей профессионального развития, которые они затем могут выбирать и комбинировать в соответствии со своими потребностями.

Основных стратегий три: целенаправленное очное обучение, онлайн-курсы и сотрудничество учителей. В то время как некоторые инициативы направлены на обеспечение очного обучения учителей (например, семинары Switch Digital в Ирландии), другие обеспечивают поддержку с помощью технологических решений. Например, инициатива «Библионет» использует только онлайн-инструменты для обеспечения учителей необходимыми навыками и цифровыми компетенциями. В ряде случаев цифровые среды создаются для обеспечения доступности учебных материалов и учебных ресурсов и поощрения учителей к обмену знаниями и опытом. В некоторых случаях (например, во Фландрии) для поощрения участия учителей используются механизмы вознаграждения и / или стимулирования. Пример удачного стимулирования инновационного использования учителями цифровых технологий в Европе — сеть eTwinning. Многие из этих инициатив прямо направлены на поощрение инновационных стратегий преподавания и обучения: персонализированное обучение, саморегулируемое обучение, совместное обучение.

3. Укрепление инфраструктуры, часто в форме предоставления мобильных устройств. Многие из национальных стратегий после 2010 года были направлены на оснащение учащихся портативными устройствами (ноутбуками, планшетами или смартфонами) для учебных целей; это так называемые учебные инициативы 1 : 1 (один ученик — один компьютер). Выявлено их положительное влияние на практику и результаты обучения за счет создания более ориентированной на учащихся образовательной среды, так как они усилили такие параметры, как взаимодействие, персонализация, обратная связь, индивидуальный контент, мотивация учащихся, вовлеченность родителей. В настоящее время в части инфраструктурных аспектов преобладающими тенденциями стали: предоставление мобильных устройств и необходимой инфраструктуры, цифровых учебников, использование виртуальных сред обучения, платформ, приложений или инструментов.

4. Изменение учебной программы с учетом использования цифровых технологий. Ис-

следование практической реализации учебных программ, использующих ИКТ, показало, что технологические программы, чтобы быть эффективными, должны быть реализованы как часть более широкой педагогической структуры. С другой стороны, и учителя борются за интеграцию технологий с требованиями учебной программы, что указывает на необходимость разработки учебной программы, которая в большей степени способствует использованию цифровых технологий.

5. Потребность в образовательных ресурсах. Отвечая на потребности учителей, большинство государств — членов ЕС создали национальные или региональные платформы или веб-сайты для школьного образования, которые предоставляют некоторый цифровой контент и ресурсы, согласованные с соответствующими учебными планами и целями обучения. Издатели учебников также перешли к выпуску своих учебников в электронном формате, дополнив их дополнительными цифровыми ресурсами для учителей, учащихся и родителей. Подходы к решению этой задачи различаются по странам. Например, эстонская инициатива по созданию электронной школы была принята как часть всеобъемлющей и новаторской системы электронного правительства, управляемой специально созданными структурами управления (e-estonia). При этом в Австрии пошли по пути создания всеобъемлющей многомерной стратегии ИКТ, связанной с образованием, администрированием и социальной инфраструктурой, рынком труда и пр.

Цифровые учебные программы, цифровизация содержания обучения, электронные учебники

Современные интерактивные платформы, разрабатываемые для школы, обычно ориентированы не только на предоставление учителю доступа к готовому контенту, но также позволяют учителям и образовательным организациям разрабатывать собственные уроки, педагогические мероприятия и учебные программы. Причем важно, что делать это они могут коллективно, «перемещая» предметное содержание в том числе между предметами, работать совместно над общими тематиками, но в рамках своих рабочих программ и учебных предметов. Это стимулирует сотрудничество между учителями и способствует развитию междисциплинарных связей. Это также способствует созданию фундамента для системного подхода в образовательной организации к формированию общеучебных умений и компетенций путем

объединения в рамках общего продукта и единой образовательной программы усилий по различным предметам и уровням обучения.

Этапы оцифровки учебной программы различаются по странам. По данным ОЭСР, 43% стран — участников исследования сообщили, что предоставляют некоторую цифровую версию учебной программы, 16% находятся на пути к внедрению полностью интерактивной цифровой учебной программы, а 14% уже внедрили интерактивную цифровую учебную программу.

Вот некоторые подходы к цифровизации учебных программ.

- Создание электронных вариантов учебных документов в форматах PDF, HTML и Word, с которыми можно работать. Подразумевается, что учебная программа задает направление, а не предоставляет учителям подробное содержание, поэтому предполагается, что учителям не нужно манипулировать текстом в интерактивном режиме.

- Создание интерактивной цифровой учебной программы, которая позволяет пользователю динамически взаимодействовать с учебной программой с помощью гиперссылок или интерактивных инструментов, а также создавать собственные программы. В Финляндии создан веб-сервис электронных учебных программ, в Венгрии — интеллектуальный планировщик учебных программ, в Корее — интерактивная платформа для манипулирования учебной программой и разработки собственной программы обучения.

- Использование интерактивной цифровой учебной программы. В Норвегии программа, разработанная министерством, представлена в цифровом формате в интернете, а учителя могут выбирать то, что им нужно, и находить дополнительные ресурсы и рекомендации по применению учебной программы.

Цифровая учебная программа в настоящее время характеризуется следующими качествами:

интерактивность создает условия для динамического взаимодействия между различными группами пользователей, включая сотрудничество учителей в школьных сетях;

участие учителя и школьной администрации, а иногда и учеников, что обеспечивает вовлечение всех участников в окончательный дизайн учебной программы с учетом его выбора и адаптируемости;

интеграция обеспечивает интеграцию содержания обучения, учебников, средств обучения, инструментариев для оценивания на одной

платформе. Такая интеграция постепенно стирает границы между учебными программами, педагогикой и оценкой;

преемственность между классами и учебными предметами позволяет проследить динамику развития обучения, логику развития содержания, лучше понимать предварительные условия обучения, которые могли быть пропущены в более ранних классах или которые могут быть усилены в других областях обучения, что может помочь учащимся заполнить пробелы в обучении.

Еще один вариант цифровизации реализуется, когда различные цифровые технологии включаются в уже работающую учебную программу с четко определенным объемом и последовательностью содержания. Например, содержание учебной программы может быть реализовано:

а) в электронных учебниках: оцифрованные традиционные учебники с дополнительными цифровыми материалами или ссылками на эти материалы, возможностью адаптировать материалы к потребностям конкретного класса; интерактивные электронные учебники, в которых есть динамические инструменты для обучения, оценки или решения проблем;

б) в хранилищах для материалов уроков, организованных в последовательности рабочей программы и в соответствии с требованиями национальной учебной программы, в первую очередь ориентированных на задачи и интерактивные действия учащихся.

Например, электронные учебники в Эстонии. Все учителя Эстонии имеют доступ к библиотеке электронных учебников через интерактивную обучающую платформу *Oriq.ee*, которая охватывает большинство предметов, включая математику. Большинство учащихся 4–6-х классов (73%) и 7–9-х классов (81%) являются активными пользователями электронных учебников *Oriq*.

Будущее учебников по математике в связи с технологическими изменениями

Ключевая роль в определении учебной программы по математике всегда принадлежала учебникам, именно они определяли содержание и направляли методику обучения. Однако в настоящее время, когда содержание задается образовательным стандартом, а методики выбираются и определяются учителем, перед исследователями встает вопрос об изменении роли учебника. Технологии позволяют работать с учебником в интерактивном режиме, изменять последовательность изучения тем, расширять

и дополнять содержание. Смогут ли учителя математики — в дополнение к авторам учебников и разработчикам учебных программ — играть центральную роль в создании учебных материалов для учащихся?

Ответ на этот вопрос сводится к тому, что учебники математики сохранятся, хотя они могут эволюционировать, а их роль в системе образования может стать менее центральной и доминирующей, поскольку стандарты и процедуры оценки будут играть некоторые из ролей, которые раньше играли учебники. И хотя учителям будет легче редактировать и создавать документы, маловероятно, что они возьмут на себя инициативу в написании учебников.

Вывод, который следует из большинства современных исследований, весьма однозначен: учебник, созданный единым автором или небольшим авторским коллективом, теряет функции единственной движущей силы, однако он продолжает оставаться источником систематически изложенных и определенных программой и стандартом теоретических знаний, разных по сложности и глубине, и продуманной системы заданий и упражнений, разворачивающейся по мере развития понятий и взросления учащихся.

Какова роль учителя? Интересно мнение Гленды Лаппан, президента североамериканской профессиональной организации учителей — Национального совета учителей математики, которая считает, что роль учителя состоит в том, чтобы принять учебные материалы и эффективно реализовать их с помощью продуманного планирования уроков, внимательного изучения того, что учащиеся делают в классе, анализа того, как и что они изучают, корректировки задач и задаваемых вопросов, а также взаимодействия с коллегами. Исследователи соглашались с тем, что задача учителя состоит не в том, чтобы искать или создавать математические задачи для своих учеников. Они полагают, что, учитывая изменения математики как дисциплины, не учитель или социум должны выносить суждения о том, что должны изучать школьники, а люди, более глубоко знакомые с математикой и с тем, как знание математики подготовит учащихся к жизни, профессиональному образованию и карьере.

Роль учебника — давать учителям знание, что и как должны изучать учащиеся. С одной стороны, учебники организуют содержание того, что учащиеся должны изучать, указывают, что учащиеся должны знать в каком возрасте, на каком уровне обучения или в каком учебном заведении. С другой стороны, представляя учебные за-

дачи, учебники организуют знания таким образом, чтобы сделать это содержание доступным для изучения. Играя обе эти роли, учебники направляют учителей, позволяя им сосредоточить свое внимание на «настройке» задач, на том, чтобы помочь своим ученикам достичь сформулированных целей и результатов обучения.

Исследователи сходятся во мнении, что растущее влияние стандартов и оценочных процедур имеет технологическую составляющую, которая обеспечивает сбор, хранение и поиск данных. Новые системы данных принципиально меняют оценку деятельности самих учителей, школ и регионов. Однако эти статистические методы требуют в своих целях общих учебных планов, общих оценок, которые выставляются учащимся каждый год, а также систем данных, в которых каждому учителю и ученику дается уникальный идентификационный номер, перемещающийся с ним, хранящий его результаты, связанные с идентификаторами учителей. Привлекательность таких систем данных для руководства заключается в том, что они позволяют привлекать педагогов к ответственности за результаты. Сторонники развития большей национальной общности видят в едином учебном плане по математике ряд преимуществ, в том числе и большее единообразие в учебниках. Критики жесткой отчетности считают, что такие изменения не должны приветствоваться, они предостерегают: диктат данных приведет к однородности учебных программ.

В дополнение к взрыву в накоплении цифровых данных прогресс в технологии изменил природу текстов, а также то, что требуется для создания и распространения информации. В случае с учебниками эти изменения предполагают изменение традиционных отношений между автором учебника или разработчиком учебной программы и преподавателем. Роль учителя — формировать учебник для использования с определенными группами учащихся в определенных местах на основе собственного профессионального суждения. Технологические достижения меняют понятие того, что значит дополнять учебник. Сейчас учитель может добавлять записи о работе, сделанной в классах, снимки смарт-доски, аудиозапись обсуждения на уроке или, возможно даже, отредактированные цифровые видеозаписи класса.

С помощью цифровых технологий дополнение приближается к концепции «открытой культуры» соавторства новой версии, а не дополнения существующей версии, которая остается неизменной. Примером является Википедия. Согласно концепции «открытой культуры», конкрет-

ные продукты знаний или тексты не являются фиксированными; знания должны распространяться свободно, и их рост может происходить за счет разработки, изменения или обогащения уже существующих продуктов знаний на совместной основе, не ограничиваясь правилами, связанными с правовой защитой интеллектуальной собственности.

Приведем два примера. Среда CK12.org (США) публикации цифровых учебников для школ предполагает, что учителя могут использовать эту платформу для создания персонализированных частей книги для поддержки обучения учащихся с ограниченными возможностями; затем происходит адаптация существующей цифровой книги, чтобы превратить то, что изначально было создано как персонализированный ресурс для обучения, в текст, который могут использовать другие (см. educationnews.org/michael-f-shaughnessy/47145.html).

Аналогично в израильской системе учащиеся получают бумажный учебник и доступ к его цифровому формату, включая ссылки на интерактивные ресурсы, предоставляемые издателем, на сайте school.kotar.co.il/Default.aspx. Сайт поощряет учителей добавлять свои собственные веб-ресурсы.

Однако, несмотря на успехи Википедии, анализ существующих Вики-книг показывает, что существует не так много учебников и что большинство Вики-книг, по-видимому, имеют одного автора, иногда с незначительным вкладом небольшой группы.

Разработчики учебников и учебных программ могут столкнуться с серьезной угрозой со стороны примеров и иллюстраций, объединяющихся вокруг установленных стандартов. Интересно, что в контексте дебатов о том, как следует преподавать геометрию в израильских средних классах, именно группа израильских математиков была обеспокоена такой возможностью. Они утверждали, что учебные документы министерства отражают конкретное мнение относительно порядка изложения геометрических аксиом и порядка преподавания геометрии. Их критика была обоснована тем, что порядок разработки идей, а также примеры и образцы уроков должны оставаться прерогативой авторов учебников и не должны предоставляться министерством образования.

Понятие «цифровые учебные ресурсы»

Исследования, связанные с цифровыми учебными ресурсами (учебные программы / материалы / учебники, далее — ЦУР) в математическом образовании, достаточно часты в последние

5 лет. Одна из проблем современных исследователей: надо ли различать цифровые технологии, с одной стороны, и ресурсы или учебные материалы, с другой. Утверждается, что «новые носители информации не просто копируют функциональность старых с возрастающей эффективностью... они создают качественно различающиеся формы взаимодействия между пользователем и средой, основанные, например, на введении новых типов пользовательского интерфейса или на предоставлении пользователю мгновенной обратной связи».

Потенциальные возможности ЦУР рассматриваются с точки зрения трех функций: обучение, оценивание и управление результатами, менеджмент.

Обучение

Основной потенциал ЦУР — его способность трансформировать пространство обучения для повышения интерактивности и настраиваемости.

Пространство обучения рассматривается как:

- пространство представления (введение элементов содержания обучения может включать в себя, например, видеопрезентацию, которая представляет собой рассказанный пример процедуры или анимацию для демонстрации процедуры);

- пространство задач (от простых задач до сложных проблемных ситуаций);

- рабочее пространство (набор инструментов и ресурсов, доступных для решения задач; доступность инструмента означает наличие виртуальных инструментов — редакторов уравнений, графических утилит, измерительных инструментов, инструментов геометрии), для него характерны гибкость — есть выбор, какие инструменты использовать и как их использовать, и связность — возможность делиться с другими и работать коллективно;

- пространство навигации (нелинейный способ, которым учащиеся могут продвигаться по математическим темам, гиперссылки и пр.).

Еще одна потенциальная возможность, заложенная в ЦУР, — возможность адаптации учебных пространств в цифровых материалах для пользователя в зависимости от его способностей и производительности. Для оценки часто используется настройка, когда программа выбирает контент на основе результатов учащегося при оценивании.

Существуют и более тонкие способы настройки контента, что проявляется в различии между терминами «индивидуализация» и «настройка». Цель настройки — достижение баланса между

характеристиками учащегося и характеристиками учебной среды, между тем, что он может и что выходит за рамки его нынешних возможностей. Индивидуализация рассматривается на платформе объекта обучения — учащегося, участвующего почти исключительно в цифровой учебной программе, при небольшом взаимодействии с другими объектами обучения при решении аналогичных академических задач. Такая программа может соответствовать потребностям конкретного человека, однако противоречит персонализации. Персонализация реализуется как интерактивная учебная среда для сотрудничества и совместного решения задач, которая обеспечивает встраивание каркасов для отдельного учащегося в общую задачу таким образом, чтобы изменить проблемное пространство, но сохранить связность учебного пространства.

Например, исследователи выделяют три типа электронных учебников.

Интегративный электронный учебник. Это модель электронного учебника, который представляет собой оцифрованную версию существующего бумажного учебника с дополнительными ссылками и цифровыми инструментами, добавленными в текст. В некоторых случаях оцифрованные тексты могут позволить учителям добавлять дополнительные ссылки и ресурсы по своему выбору или дизайну.

«Живой» электронный учебник. Это модель накопительного типа, в которой некоторое сообщество (например, учителя и IT-специалисты) разработало цифровой учебник, и он постоянно развивается благодаря вкладу других практикующих учителей.

Пример: программа *Sésamath* во Франции, эта программа постоянно развивается на основе предложений учителей, которые после консультации с основной командой разработчиков пересматривают ресурсы. Риски модели: согласованность учебных программ может пострадать, поскольку авторство распределяется между авторами, которые не общаются напрямую друг с другом; распределенное авторство делает деятельность раздробленной, без основополагающей философии или структуры, направляющей развитие продукта.

Другой пример. Программа *Hélise* была разработана небольшой командой из четырех авторов, трех преподавателей и исследователя, и имела более последовательную философию: была организована вокруг цикла развития, когда учащиеся возвращаются к содержанию с течением времени по спирали.

Разница в процессах проектирования между двумя моделями значительна, потому что для

возникновения спиральной организации дизайнеры должны знать и общаться друг с другом по содержанию и действиям. Такое общение и осведомленность затруднены, когда дизайнерские решения расплывчаты, например, с командой Sésamath.

Интерактивный электронный учебник. Это модель, в которой учебник полностью основан на наборе учебных объектов: задачи и интерактивные материалы (инструменты), которые можно связывать и комбинировать. Инструментальный подход обеспечивает доступ к набору инструментов, которые учащиеся выбирают сами, когда решают сложные проблемы. Эти инструменты включают в себя динамически связанные инструменты представления (редактор формул, инструмент построения графиков, таблицы). Отдельные инструменты могут быть адаптированы к конкретным темам.

Существуют хранилища уроков, которые организованы в последовательность учебных программ, часто они связаны с национальной учебной программой. Существует две модели разработки репозитория.

Одна модель включает небольшие авторские группы, работающие в рамках единой философии, например, в случае с Академией Хана (khanacademy.org, США), sofatutor (sofatutor.com, Германия) и Hélice (Франция). Эти разработки часто сосредоточены на пространстве презентации с коллекциями видео или анимаций по каждой теме, которые демонстрируют материал по теме или объясняют процедуру. Они также включают задачное пространство, которое обычно связано с задачами, проблемными ситуациями из бумажных учебников.

Другая модель состоит в том, что организация нанимает более многочисленные, но разрозненные команды учителей или дизайнеров для разработки уроков. Затем включается процесс интеграции уроков в веб-сайт, на котором размещаются уроки; включаются функции оценки или управления, чтобы сделать их полностью пригодными для использования в рамках учебной программы. В этих программах основное внимание уделяется презентационному пространству.

Оценивание и результаты

ЦУР может обеспечить обратную связь для учащихся, а также предоставлять данные об успеваемости для заинтересованных сторон: учащихся, родителей, учителей и администрации школы. Оценивание может быть реализовано в различных формах. В некоторых программах есть вопросы с вариантами ответов

или с краткими ответами, которые программа автоматически сохраняет; оценивание в программе во многом похоже на традиционное, учитывается процент правильно выполненных заданий, большинство из которых являются процедурными. В ряде цифровых программ есть более тонкие и сложные формы оценивания, например, ученики оцениваются на основе их действий с манипуляторами, что позволяет оценить стратегии выполнения задания, а не только результат.

«Адаптивные» программы регулируют переход учащихся от одной темы к другой; они обычно полагаются на результативность учащегося при принятии решения о том, переходить ему к следующей теме или предложить материал для продолжения изучения текущей. В ряде исследований показано, что «использование адаптивного учебного программного обеспечения привело к умеренным успехам в обучении, но эти преимущества обычно были связаны с узконаправленным и относительно простым содержанием; кроме того, использование этих программ замедляло темпы охвата и завершения контента и не касалось глубокого изучения, как это было необходимо».

Управление

ЦУР часто сочетают с системами управления обучением, объединяющими учебный план, результаты контрольно-оценочной деятельности, учет посещаемости и другие административные функции. Они обычно разрабатываются крупными издателями, которые заинтересованы в том, чтобы дать школам комплексные системы.

Например, интеграция в цифровые учебники электронного дневника позволяет:

- давать индивидуальные задания и предоставлять индивидуальные отзывы;
- управлять заданиями в классе, индивидуальными заданиями и прогрессом;
- предоставлять обратную связь, оценивать работы;
- делать оценки учеников доступными на уровне школы (с доступом только для соответствующих пользователей);
- делиться результатами с администрацией, родителями, школьным сообществом.

Какие же выводы делают исследователи относительно использования ЦУР в математическом образовании?

1. Имеет место расхождение между разработчиком и пользователем, особенно в коммерческой разработке полномасштабных систем учеб-

ных материалов. Однако есть и другие примеры. К таким примерам относятся развивающийся или «живой» электронный учебник с отдельными узлами, предварительно заполненными разработчиками, и тщательно подобранным набором онлайн-ресурсов, который постоянно модифицируется совместно с учителями. Это открытая цифровая педагогическая конфигурация заданной структуры, обеспечивающая систему различными траекториями обучения и диагностических оценок.

2. В настоящее время изменения в учебных программах происходили в основном в пространстве презентации, с некоторыми изменениями в пространстве задач, но без значительных изменений в рабочем пространстве или пространстве навигации. По мере того как изменения становятся более масштабными, ожидается, что аналитическая важность признания посредничества станет гораздо более значительной. Например, пространство навигации на основе гипертекста, уменьшающее жесткость последовательности тем учебной программы, может поддерживать очень разные понятия персонализированного обучения — по сравнению с теми, которые выражены в строго линейно-иерархической структуре текущих учебных программ. Другой тип рабочего пространства, приводимый здесь в качестве альтернативы, может изменить взаимодействие ученика с учебником, которое преобладало с традиционными бумажными учебниками.

3. Пространство задач во многих случаях отражает то, что находится в бумажных программах, является ограниченным с точки зрения ожидаемых от учащихся подходов к решению. Большинство адаптивных программ «заточены» на отработку навыков. Таким образом, для типичного ЦУР соотношение между пространством введения теории и задачным пространством остается таким же, как и в типичной, бумажной учебной программе.

Исключение составляют программы, требующие от учащихся манипулировать объектами для демонстрации результата, например, DreamBox и Algebra in Action. Интеллектуальные обучающие системы пытаются создать более открытое задачное пространство, но ограничены небольшим набором стратегий решения, вокруг которых способны создать обратную связь.

4. Преобразование цифровых рабочих мест все еще остается относительно рудиментарным, за исключением интерактивных электронных учебников. В этих учебниках инструменты используются повсеместно; кроме того, эти инструменты довольно гибкие, так как их можно использовать

в нескольких темах и применять разными способами и в любом порядке. Однако здесь меньше внимания уделяется связанности рабочего пространства.

5. ЦУРы способствуют ослаблению традиционных границ между педагогикой и оценением, а также между констатирующими и формирующими методами оценивания. Например, встраивание скрытой оценки в индивидуализированные адаптивные системы обучения, в которых автоматизированные процессы оценки лежат в основе адаптации опыта и мониторинга эффективности, предполагает, что может потребоваться расширенная карта форм и функций оценки, которая признает новые измерения — от адаптивного к информативному, от эпизодического к непрерывному.

6. Существуют по крайней мере три особенности ЦУР, которые делают взаимодействие учителей с ними полезным:

- их гибкость с точки зрения адаптации и изменения дизайна для индивидуальной подготовки уроков, а также коллективной работы над дизайном с коллегами, дистанционная или совместная работа на занятиях по повышению квалификации;
- возможности для персонализации и дифференциации, чтобы удовлетворить индивидуальные потребности учащихся, например, в предоставлении конкретных задач / действий / индивидуальной обратной связи по задачам;
- множество функций оценивания, которые обеспечивают легкий доступ к различным аспектам обучения учащихся.

7. Взаимодействие учащихся с ЦУР исследовано слабо, однако можно сделать следующие выводы о том, чем полезны ЦУР для учащихся.

• Исследование решения задач учащимися, в частности с помощью интерактивных наглядных пособий, показало необычайно обширную умственную работу, охватывающую весь цикл логических действий по решению задачи: от выдвижения предположений до записи решения и формулирования выводов. При разработке электронных учебников следует планировать интерактивные примеры, обеспечивающие когнитивную поддержку, а также нужно выстраивать такой контроль и такие связи между представлениями, которые помогают фиксировать интересные, нестандартные идеи, выдвигаемые учащимися.

• Интерактивные функции ЦУР, по-видимому, становятся наиболее эффективными в комплексе с практиками формирующего оценивания, которые помогают учащимся продви-

гаться вперед, а учителям стимулировать следующие шаги обучения. Представляется, что общая адаптивность такого ЦУР, в частности, в отношении персонализированной (диагностической) оценки является одним из самых больших преимуществ. Эта адаптивность также имеет решающее значение для поиска учащимися новых путей и последовательных шагов в решении задач, для избегания недопонимания, внесения корректировок.

8. Среди критериев для создания и оценки технологических возможностей ЦУР должны быть такие, которые отвечают за обеспечение рефлексии, обучающее оценивание, помощь в выделении и концентрации на важных деталях задач. Результаты исследований указывают на предположение, что электронное оценивание должно быть «наводящим на размышления», а не детерминистическим в отношении работы учащихся.

Литература

1. Карлов И.А., Киясов Н.М., Ковалев В.О., Кожевников Н.А., Патаракин Е.Д., Фрумин И.Д., Швиндт А.Н., Шонов Д.О. Анализ цифровых образовательных ресурсов и сервисов для организации учебного процесса школ. — М.: НИУ ВШЭ, 2020. — (Современная аналитика образования, № 10(40)).

2. Гэйбл Э. Цифровая трансформация школьного образования. Международный опыт, тренды, глобальные рекомендации / пер. с англ.; под ред.

П.А. Сергоманова. — М.: НИУ ВШЭ, 2019. — (Современная аналитика образования, № 2 (23)).

3. Conrads J., Rasmussen M., Winters N., Geniet A., Langer L. Digital Education Policies in Europe and Beyond: Key Design Principles for More Effective Policies / C. Redecker, P. Kamylyis, M. Bacigalupo, Y. Punie (ed.). — EUR 29000 EN, Publications Office of the European Union, Luxembourg, 2017.

4. What Students Learn Matters: Towards a 21st Century Curriculum. — OECD Publishing, Paris. — URL: <http://doi.org/10.1787/d86d4d9a-en>.

5. Picciano A.G. Theories and frameworks for online education: Seeking an integrated model // Online Learning, 2017. No. 21(3). P. 166–190.

6. Reyer V. der V. Digital strategies in education across OECD countries: Exploring education policies on digital technologies OECD // Education Working Papers, 2020. No. 226. — URL: <http://dx.doi.org/10.1787/33dd4c26-en>.

7. Pepin B., Choppin J., Ruthven K., Sinclair N. Digital curriculum resources in mathematics education: foundations for change // ZDM Mathematics Education, 2017. No. 49. P. 645–661. — URL: <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0879-z>.

8. Daniel Chazan & Michal Yerushalmy. The Future of Mathematics Textbooks: Ramifications of Technological Change / Stocchetti Matteo, Peter Lang // Media and education in the digital age: concepts, assessments, subversions. — GmbH Internationaler Verlag der Wissenschaften, Berlin, 2014. — URL: <https://doi.org/10.3726/978-3-653-04437-9>.

Из интернета

Математики спрогнозировали пик волны эпидемии в РФ

<https://news.mail.ru/society/44447106/?frommail=1>

Ученые Центра интеллектуальной логистики Санкт-Петербургского государственного университета разработали новую модель прогнозирования развития эпидемий. С помощью этого метода исследователи готовят сценарии распространения коронавируса в России, основываясь на данных стран, где болезнь была зафиксирована раньше.

Первые прогнозы ученые начали строить еще в апреле 2020 года. Тогда же они столкнулись и с тем, что все имевшиеся на тот момент модели математического прогнозирования развития эпидемий в случае с COVID-19 не работали. Пришлось разработать новый подход и новую модель. Ее особенность в том, что для прогнозирования эволюции эпидемии в России она использует данные о динамике распространения нового коронавируса в странах, где эпидемия началась раньше.

По подсчетам исследователей, пик по количеству активных случаев болезни в Москве ожидается 10–12 декабря. Уже можно говорить о том, что пик заболеваний пришелся на 24 декабря.

Новая модель построена на итеративном подходе: данные, на основании которых строятся прогнозы на 2–3 недели, обновляются в реальном времени.

Важная составляющая итеративной процедуры — формирование цепочки стран распространения эпидемии, упорядоченных по времени выхода на одинаковые уровни значения выбранных параметров. Для верной настройки модели необходимо, чтобы в этих странах использовались сравнительно одинаковые меры сдерживания эпидемии: карантин, самоизоляция, социальная дистанция и т.п.

В. ПЫРКОВ,
г. Батайск,
Ростовская обл.

К 110-ЛЕТНЕМУ ЮБИЛЕЮ М.В. КЕЛДЫША



Почтовая марка
к столетию
со дня рождения
М.В. Келдыша



М.В. Келдыш,
1920 г.



М.В. Келдыш,
1931 г.



М.В. Келдыш,
1935 г.



М.В. Келдыш, 1961 г.



С.П. Королев, И.В. Курчатов,
М.В. Келдыш, 1959 г.

Мстислав Всеволодович Келдыш (1911–1978) — отечественный математик и механик. Академик Академии наук СССР (с 1946) и ее президент (1961–1975), один из идеологов советской космической программы.

Детство и годы учебы

Мстислав Всеволодович Келдыш родился 10 февраля 1911 г. в Риге, в дворянской семье профессора В.М. Келдыша, создателя «русского железобетона», причастного практически ко всем крупным стройкам 30-х годов XX века.

Слава (так Мстислава называли в семье) был пятым ребенком. По воспоминаниям близких, он был «хорошенький, аккуратненький мальчик, смиренненький, тихий». Как его братья и сестры, первоначальное образование, он получил дома под руководством матери. В 1919–1923 гг. семья проживала в Иваново, где отец преподавал в Политехническом институте. Здесь Слава пошел в школу (ныне СОШ № 30). После переезда в Москву он продолжил обучение в седьмой показательной школе, а старшие классы окончил в школе со строительным уклоном.

После окончания школы Мстислав собирался поступить в инженерно-строительный институт, где преподавал отец, но не прошел по возрасту. Склонность к математике у него проявилась в 7–8-х классах, при этом он не был вундеркиндом, но занимался очень хорошо и сосредоточенно.

Его старшая сестра училась на механико-математическом факультете МГУ и вела научную работу под руководством знаменитого Н.Н. Лузина. В их доме часто собирались математики, среди которых были А.Н. Колмогоров и М.А. Лаврентьев. Мстислав постепенно приобщился к математическим разговорам старших и уже в 16 лет стал студентом физико-математического факультета МГУ. Знакомство с М.А. Лаврентьевым вскоре переросло в многолетнее научное сотрудничество и крепкую дружбу.

Начало пути в науке

В 1931 г., по окончании университета, молодой математик М.В. Келдыш был направлен на работу в Центральный аэрогидродинамический институт (ЦАГИ), где стал работать под руководством С.А. Чаплыгина.

В 1934 г. он поступает в аспирантуру Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. Уже в 1935 г. ему присуждают степень кандидата физико-математических наук, а в 1936 г. — кандидата технических наук и звание профессора по специальности «аэродинамика». Обе эти ученые степени Келдыш получает без защиты диссертации, за совокупность полученных результатов.



Медаль имени М.В. Келдыша

В 30-е годы шло развитие скоростного самолетостроения. При этом инженеры-конструкторы столкнулись с очень серьезной проблемой флаттера, приводящего к разрушению самолета из-за возникающего в полете резонанса колебаний. Мстислав Всеволодович взялся за решение проблемы: он вывел уравнение колебаний, разработав новый раздел функционального анализа, известный сегодня как «теория пучков Келдыша». Проведя эксперименты в аэродинамической трубе, он дал рекомендации конструкторам самолетов. С тех пор явление флаттера было побеждено.

В 1938 г. М.В. Келдыш защитил диссертацию на степень доктора физико-математических наук.

С 1942 г. как профессор МГУ он читает лекции, заведует кафедрой термодинамики, руководит семинаром по теории функций комплексного переменного.

В 1943 г. Келдыш избран членом-корреспондентом АН СССР, а с 1944 г. возглавил отдел механики Математического института им. В.А. Стеклова.

В 1945 г. он справляется с «эффектом шимми», предлагая решение по устранению самовозникающих колебаний носового колеса шасси.

В 1946 г., в возрасте 35 лет, Мстислав Всеволодович избирается академиком АН СССР.

Академик М.В. Келдыш и космическая программа

С 1946 г. М.В. Келдыш начинает работать совместно с И.В. Курчатовым и С.П. Королевым над созданием ракетно-ядерного щита нашей страны. Под его научным руководством были созданы первые межконтинентальные крылатые ракеты «Буря», показавшие более высокие летные характеристики, чем у аналогичных ракет «Навахо», созданных в США.

Совместно с С.П. Королевым М.В. Келдыш становится инициатором исследований по освоению космоса. В 1954 г. они вместе с М.К. Тихонравовым представили правительству проект по созданию искусственного спутника Земли. Работу по этому направлению возглавил М.В. Келдыш. После запуска первого искусственного спутника Земли М.В. Келдышем и его сотрудниками были решены практически все основные задачи в механике космического полета. Сам М.В. Келдыш вспоминал о том времени: «Мы работали са-

мозабвенно, но не задумывались о значении своей работы. И только когда, едва отдышавшись после запуска, мы слышали, как воспринимают этот запуск во всем мире, мы поняли, что начался космический век человечества».

Дальше темп работы только увеличивался, появлялись новые, все более дерзкие проекты. Был дан старт «лунной программе», в результате которой советский «лунник» смог облететь Луну и передать на Землю сенсационные снимки ее обратной стороны. Начались расчеты траекторий беспилотных полетов к Марсу и Венере. Был создан новый метод вывода космических аппаратов на полетную траекторию не с Земли, а с околоземной орбиты.

Под руководством М.В. Келдыша и при его активном участии решались сложнейшие задачи расчета трасс космических аппаратов и корректировки их движения. Созданная схема управления полетом космических аппаратов после выхода на межпланетную траекторию стала основой для всех дальнейших баллистических расчетов и используется в наше время.

В 1961 г. «за особые заслуги в развитии ракетной техники, в создании и успешном запуске первого в мире космического корабля “Восток” с человеком на борту» правительство вторично удостоило М.В. Келдыша звания Героя Социалистического Труда (первый раз это звание ему присвоили за разработки в области военной промышленности).

Работы М.В. Келдыша по понятным причинам долгое время были засекречены, и в публикациях тех лет его скромно называли «теоретиком космонавтики», не уточняя полученных им результатов. Между тем именно он нес особую ответственность за выполнение космической программы нашей страны.

Самый молодой президент Академии наук

В 50 лет М.В. Келдыш возглавил Академию наук СССР, став самым молодым ее президентом. Под его руководством в отечественной науке были проведены глубокие преобразования: стали развиваться генетика, кибернетика, молекулярная биология, квантовая электроника и др.

М.В. Келдыш стоял у истоков создания Института прикладной математики АН СССР, который сегодня носит имя своего создателя. Этот институт сыграл важную роль в развитии современной вычислительной математики и появлении первых электронно-вычислительных машин (ЭВМ).

Последние работы М.В. Келдыша были посвящены проблеме создания солнечных электростанций на космической орбите. Он хорошо

понимал преимущества «чистой» энергетики Солнца перед современной энергетикой, загрязняющей окружающую среду своими отходами. Но трудностей здесь было предостаточно: легкую конструкцию мог сдуть «солнечный ветер», тяжелую конструкцию выводить на орбиту было сложно и дорого; еще нужны были эффективные фотоэлементы, преобразователи энергии и передатчики ее на Землю. Реализовать эти проекты он, к сожалению, не успел.

Напутствие М.В. Келдыша

О природе научного творчества и его значении М.В. Келдыш писал: «Думаю, вообще очень немного может быть сравнимо с тем чувством, которое овладевает человеком, когда он сделал научное открытие. Он узнал новое, еще совершенно неизвестное, своим открытием принес пользу людям. Именно это, видимо, и дает то наивысшее удовлетворение, какое только возможно для ученого.

Продвижение в науке невозможно без преодоления трудностей. Наука требует героизма. Но это как раз то, чего ищет молодость, то, в чем она видит счастье.

Наука открывает необозримое поле деятельности, и никогда нельзя будет сказать, что все уже открыто, что окончательно решены все проблемы.

Вместе с тем надо помнить, что все в природе соединено тончайшими связями. И поэтому исследование природы должно идти комплексно, так, чтобы не нарушать этих связей; надо постигать природу, не разрушая ее, а сохраняя и улучшая. Наука вселяет в нас оптимизм. Надо видеть в науке силу, которая преобразует мир».

Память о главном теоретике космонавтики

Начиная с 1980 г. Российская академия наук присуждает золотую медаль имени М.В. Келдыша за выдающиеся работы в области прикладной математики, механики и теоретические исследования по освоению космического пространства.

Бывший НИИ-1, занимавшийся космическим проектом под руководством М.В. Келдыша, в настоящее время называется Исследовательский центр имени М.В. Келдыша. В Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН создан посвященный ему кабинет-музей.

Памятники М.В. Келдышу установлены на его родине в Риге и в Москве на Аллее Космонавтов и Миусской площади. Именем академика Келдыша названа площадь в Москве и улицы во многих городах нашей страны, научно-исследовательское судно и авиалайнер, кратер на Луне и малая планета Солнечной системы.

Интересные факты о М.В. Келдыше

- М.В. Келдыш был избран иностранным членом шестнадцати академий мира и почетным доктором шести университетов.

- Когда Н.Н. Лузин узнал о том, что М.В. Келдыш стал сотрудником ЦАГИ, он поспешил выразить свои соболезнования его отцу: «Ваш сын попал к Лаврентьеву, который его погубит — уведет вашего сына, очень способного к большой математике, в прикладную математику, на мелкие задачи».

- М.В. Келдыш участвовал в работах по созданию термоядерной бомбы и получил за это высокую правительственную награду — звание Героя Социалистического Труда.

- М.В. Келдыш в своей административной работе придерживался трех основных принципов:

- 1) не бороться со злом, а браться и делать добрые, хорошие дела;

- 2) не слушать жалобы в отсутствии того, на кого жалоба;

- 3) никому ничего не обещать, но уж если пообещал, то сделать, даже если обстоятельства ухудшились.

- Урна с прахом М.В. Келдыша покоится в Кремлевской стене на Красной площади в Москве.

Дополнительная литература

Панов В.Ф. Современная математика и ее творцы. — М.: МГТУ, 2011.

Перцев В.В. Мстислав Всеволодович Келдыш // Вестник Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина, 2011. — Вып. 28.

Келдыш М.В. Творческий портрет по воспоминаниям современников. — М.: Наука, 2002.

Члены Российской академии наук в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН: к 75-летию юбилею МИАН: биогр. словарь-справочник / под общ. ред. В.В. Козлова. — М.: Янус-К, 2009.



Памятник
М.В. Келдышу
на Аллее
Космонавтов,
г. Москва



Памятник
М.В. Келдышу
на Миусской
площади,
г. Москва



Бюст
М.В. Келдыша,
г. Рига

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Приказ от 20 мая 2020 г., № 254.
г. Москва

ОБ УТВЕРЖДЕНИИ ФЕДЕРАЛЬНОГО ПЕРЕЧНЯ УЧЕБНИКОВ, ДОПУЩЕННЫХ К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ

ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ ИМЕЮЩИХ ГОСУДАРСТВЕННУЮ
АККРЕДИТАЦИЮ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ
НАЧАЛЬНОГО ОБЩЕГО, ОСНОВНОГО ОБЩЕГО,
СРЕДНЕГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ ОРГАНИЗАЦИЯМИ,
ОСУЩЕСТВЛЯЮЩИМИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНУЮ
ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

В соответствии с частью 5 статьи 18 Федерального закона от 29 декабря 2012 г. № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» (Собрание законодательства Российской Федерации, 2012, № 53, ст. 7598; 2019, № 49, ст. 6962), частью 3 статьи 4 Федерального закона от 2 декабря 2019 г. № 403-ФЗ «О внесении изменений в Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации» и отдельные законодательные акты Российской Федерации (Собрание законодательства Российской Федерации, 2019, № 49, ст. 6962), подпунктом 4.2.8(1) пункта 4 Положения о Министерстве просвещения Российской Федерации, утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 28 июля 2018 г. № 884 (Собрание законодательства Российской Федерации, 2018, № 32, ст. 5343; 2020, № 11, ст. 1547), в целях реализации пунктов 2, 36 Порядка формирования федерального перечня учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования, утвержденного приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 18 декабря 2019 г. № 695 (зарегистрирован министерством юстиции Российской Федерации 4 февраля 2020 г., регистрационный № 57418), приказываю:

1. Утвердить прилагаемый федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность.

2. Установить, что учебники из числа учебников, входящих в федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования, включаются в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования, утвержденный пунктом 1 настоящего приказа, на 5 лет¹ со дня вступления в силу настоящего приказа.

Министр С.С. Кравцов

¹ Часть 7 статьи 18 Федерального закона от 29 декабря 2012 г. № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации»; пункт 36 Порядка формирования федерального перечня учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования, утвержденного приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 18 декабря 2019 г. № 695 (зарегистрирован Министерством юстиции Российской Федерации 4 февраля 2020 г., регистрационный № 57418).



ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНИКОВ

ДОПУЩЕННЫХ К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ ИМЕЮЩИХ
ГОСУДАРСТВЕННУЮ АККРЕДИТАЦИЮ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ
НАЧАЛЬНОГО ОБЩЕГО, ОСНОВНОГО ОБЩЕГО, СРЕДНЕГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ОРГАНИЗАЦИЯМИ, ОСУЩЕСТВЛЯЮЩИМИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНУЮ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

1. Перечень учебников, допущенных к использованию при реализации обязательной части основной образовательной программы, в том числе учебников, обеспечивающих учет региональных и этнокультурных особенностей субъектов Российской Федерации, реализацию прав граждан на получение образования на родном языке из числа языков народов Российской Федерации, изучение родного языка из числа языков народов Российской Федерации и литературы народов России на родном языке

Порядковый номер учебника	Автор/авторский коллектив	Наименование учебника	Класс, для которого учебник разработан	Наименование издателя(-ей)
1.1.2.4	МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА (ПРЕДМЕТНАЯ ОБЛАСТЬ)			
1.1.2.4.1	Математика (учебный предмет)			
1.1.2.4.1.1.1	Бунимович Е.А., Дорофеев Г.В., Суворова С.Б. и др.	Математика	5	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.1.1.2	Бунимович Е.А., Кузнецова Л.В., Минаева С.С. и др.	Математика	6	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.1.2.1	Виленкин Н.Я., Жохов В.И., Чесноков А.С., Шварцбург С.И.	Математика (в 2 частях)	5	ООО «ИОЦ МНЕМОЗИНА»
1.1.2.4.1.2.2	Виленкин Н.Я., Жохов В.И., Чесноков А.С., Шварцбург С.И.	Математика (в 2 частях)	6	ООО «ИОЦ МНЕМОЗИНА»
1.1.2.4.1.3.1	Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г.	Математика (в 2 частях)	5	ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»
1.1.2.4.1.3.2	Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г.	Математика (в 2 частях)	6	ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»
1.1.2.4.1.4.1	Дорофеев Г.В., Шарыгин И.Ф., Суворова С.В. и др.	Математика	5	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.1.4.2	Дорофеев Г.В., Шарыгин И.Ф., Суворова С.В. и др.	Математика	6	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.1.5.1	Козлов В.В., Никитин А.А., Белоносов В.С. и др.; под ред. В.В. Козлова и А.А. Никитина	Математика	5	ООО «Русское слово»
1.1.2.4.1.5.2	Козлов В.В., Никитин А.А., Белоносов В.С. и др.; под ред. В.В. Козлова и А.А. Никитина	Математика	6	ООО «Русское слово»
1.1.2.4.1.5.3	Козлов В.В., Никитин А.А., Белоносов В.С. и др.; под ред. В.В. Козлова и А.А. Никитина	Математика: алгебра и геометрия	7	ООО «Русское слово»
1.1.2.4.1.5.4	Козлов В.В., Никитин А.А., Белоносов В.С. и др.; под ред. В.В. Козлова и А.А. Никитина	Математика: алгебра и геометрия	8	ООО «Русское слово»
1.1.2.4.1.5.5	Козлов В.В., Никитин А.А., Белоносов В.С. и др.; под ред. В.В. Козлова и А.А. Никитина	Математика: алгебра и геометрия	9	ООО «Русское слово»
1.1.2.4.1.6.1	Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.; под ред. В.Е. Подольского	Математика	5	ООО «Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ»

Порядковый номер учебника	Автор/ авторский коллектив	Наименование учебника	Класс, для которого учебник разработан	Наименование издателя(-ей)
1.1.2.4.1.6.2	Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.; под ред. В.Е. Подольского	Математика	6	ООО «Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ»
1.1.2.4.1.7.1	Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др.	Математика	5	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.1.7.2	Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др.	Математика	6	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.1.8.1	Ткачева М.В.	Математика	5	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.1.8.2	Ткачева М.В.	Математика	6	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.1.9.1	Перова М.Н., Капустина Г.М.	Математика (для обучающихся с интеллектуальными нарушениями) (специальный учебник)	5	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.1.9.2	Капустина Г.М., Перова М.Н.	Математика (для обучающихся с интеллектуальными нарушениями) (специальный учебник)	6	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.1.9.3	Алышева Т.В.	Математика (для обучающихся с интеллектуальными нарушениями) (специальный учебник)	7	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.1.9.4	Эк В.В.	Математика (для обучающихся с интеллектуальными нарушениями) (специальный учебник)	8	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.1.9.5	Андропов А.П., Ходот А.Ю., Ходот Т.Г.	Математика (для обучающихся с интеллектуальными нарушениями) (специальный учебник)	9	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.1.10.1	Фадеева С.В., Власова А.Ф.	Математика (для обучающихся с интеллектуальными нарушениями) (специальный учебник)	5	ООО «Издательство ВЛАДОС»
1.1.2.4.2	Алгебра (учебный предмет)			
1.1.2.4.2.1.1	Бунимович Е.А., Кузнецова Л.В., Минаева С.С. и др.	Алгебра	7	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.2.1.2	Бунимович Е.А., Кузнецова Л.В., Минаева С.С. и др.	Алгебра	8	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.2.1.3	Бунимович Е.А., Кузнецова Л.В., Минаева С.С. и др.	Алгебра	9	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.2.2.1	Дорофеев Г.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А. и др.	Алгебра	7	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.2.2.2	Дорофеев Г.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А. и др.	Алгебра	8	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.2.2.3	Дорофеев Г.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А. и др.	Алгебра	9	АО «Издательство "Просвещение"»

Порядковый номер учебника	Автор/ авторский коллектив	Наименование учебника	Класс, для которого учебник разработан	Наименование издателя(-ей)
1.1.2.4.2.3.1	Колягин Ю.М., Ткачева М.В., Федорова Н.Е. и др.	Алгебра	7	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.2.3.2	Колягин Ю.М., Ткачева М.В., Федорова Н.Е. и др.	Алгебра	8	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.2.3.3	Колягин Ю.М., Ткачева М.В., Федорова Н.Е. и др.	Алгебра	9	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.2.4.1	Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. и др.; под ред. С.А. Теляковского	Алгебра	7	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.2.4.2	Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. и др.; под ред. С.А. Теляковского	Алгебра	8	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.2.4.3	Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. и др.; под ред. С.А. Теляковского	Алгебра	9	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.2.5.1	Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. и др.	Алгебра (углубленное обучение)	7	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.2.5.2	Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. и др.	Алгебра (углубленное обучение)	8	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.2.5.3	Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. и др.	Алгебра (углубленное обучение)	9	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.2.6.1	Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.; под ред. В.Е. Подольского	Алгебра	7	ООО «Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ»
1.1.2.4.2.6.2	Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.; под ред. В.Е. Подольского	Алгебра	8	ООО «Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ»
1.1.2.4.2.6.3	Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.; под ред. В.Е. Подольского	Алгебра	9	ООО «Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ»
1.1.2.4.2.7.1	Мерзляк А.Г., Поляков В.М.; под ред. В.Е. Подольского	Алгебра (углубленное обучение)	7	ООО «Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ»
1.1.2.4.2.7.2	Мерзляк А.Г., Поляков В.М.; под ред. В.Е. Подольского	Алгебра (углубленное обучение)	8	ООО «Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ»
1.1.2.4.2.7.3	Мерзляк А.Г., Поляков В.М.; под ред. В.Е. Подольского	Алгебра (углубленное обучение)	9	ООО «Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ»
1.1.2.4.2.8.1	Часть 1; Мордкович А.Г.; Часть 2: Мордкович А.Г. и др.; под ред. А.Г. Мордковича	Алгебра (в 2 частях)	7	ООО «ИОЦ МНЕМОЗИНА»
1.1.2.4.2.8.2	Часть 1; Мордкович А.Г.; Часть 2: Мордкович А.Г. и др.; под ред. А.Г. Мордковича	Алгебра (в 2 частях)	8	ООО «ИОЦ МНЕМОЗИНА»
1.1.2.4.2.8.3	Часть 1; Мордкович А.Г., Семенов П.В.; Часть 2: Мордкович А.Г., Александрова А.Л., Мишустина Т.Н. и др.; под ред. А.Г. Мордковича	Алгебра (в 2 частях)	9	ООО «ИОЦ МНЕМОЗИНА»
1.1.2.4.2.9.1	Мордкович А.Г., Николаев Н.П.	Алгебра (в 2 частях) (углубленное обучение)	7	ООО «ИОЦ МНЕМОЗИНА»
1.1.2.4.2.9.2	Часть 1: Мордкович А.Г., Николаев Н.П.; Часть 2: Мордкович А.Г. и др.; под ред. А.Г. Мордковича	Алгебра (в 2 частях) (углубленное обучение)	8	ООО «ИОЦ МНЕМОЗИНА»

Порядковый номер учебника	Автор/ авторский коллектив	Наименование учебника	Класс, для которого учебник разработан	Наименование издателя(-ей)
1.1.2.4.2.9.3	Часть 1: Мордкович А.Г. и др.; Часть 2: Мордкович А.Г. и др.; под ред. А.Г. Мордковича	Алгебра (в 2 частях) (углубленное обучение)	9	ООО «ИОЦ МНЕМОЗИНА»
1.1.2.4.2.10.1	Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др.	Алгебра	7	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.2.10.2	Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др.	Алгебра	8	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.2.10.3	Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др.	Алгебра	9	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.2.11.1	Петерсон Л.Г., Абраров Д.Л., Чуткова Е.В.	Алгебра (в 3 частях)	7	ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»
1.1.2.4.2.11.2	Петерсон Л.Г., Агаханов Н.Х., Петрович А.Ю., Подлипский О.К., Рогатова М.В., Трушин Б.В.	Алгебра (в 3 частях)	8	ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»
1.1.2.4.2.11.3	Петерсон Л.Г., Агаханов Н.Х., Петрович А.Ю., Подлипский О.К., Рогатова М.В., Трушин Б.В.	Алгебра (в 2 частях)	9	ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»
1.1.2.4.2.12.1	Рубин А.Г., Чулков П.В.	Алгебра	7	ООО «Баласс»
1.1.2.4.2.12.2	Рубин А.Г., Чулков П.В.	Алгебра	8	ООО «Баласс»
1.1.2.4.2.12.3	Рубин А.Г., Чулков П.В.	Алгебра	9	ООО «Баласс»
1.1.2.4.2.13.1	Мордкович А.Г., Семенов П.В., Александрова Л.А., Мардахаева Е.Л.	Алгебра	7	ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»
1.1.2.4.2.13.2	Мордкович А.Г., Семенов П.В., Александрова Л.А., Мардахаева Е.Л.	Алгебра	8	ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»
1.1.2.4.2.13.3	Мордкович А.Г., Семенов П.В., Александрова Л.А., Мардахаева Е.Л.	Алгебра	9	ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»
1.1.2.4.3	Геометрия (учебный предмет)			
1.1.2.4.3.1.1	Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др.	Геометрия	7–9	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.3.2.1	Берсенев А.А., Сафонова Н.В.	Геометрия	7	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.3.2.2	Берсенев А.А., Сафонова Н.В.	Геометрия	8	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.3.2.3	Берсенев А.А., Сафонова Н.В.	Геометрия	9	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.3.3.1	Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Прасолов В.В.; под ред. В.А. Садовниченко	Геометрия	7	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.3.3.2	Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Прасолов В.В.; под ред. В.А. Садовниченко	Геометрия	8	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.3.3.3	Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Прасолов В.В.; под ред. В.А. Садовниченко	Геометрия	9	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.3.4.1	Козлова С.А., Рубин А.Г., Гусев В.А.	Геометрия	7–9	ООО «Баласс»
1.1.2.4.3.5.1	Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.; под ред. В.Е. Подольского	Геометрия	7	ООО «Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ»

Порядковый номер учебника	Автор/ авторский коллектив	Наименование учебника	Класс, для которого учебник разработан	Наименование издателя(-ей)
1.1.2.4.3.5.2	Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.; под ред. В.Е. Подольского	Геометрия	8	ООО «Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ»
1.1.2.4.3.5.3	Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.; под ред. В.Е. Подольского	Геометрия	9	ООО «Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ»
1.1.2.4.3.6.1	Мерзляк А.Г., Поляков В.М.; под ред. В.Е. Подольского	Геометрия	7	ООО «Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ»
1.1.2.4.3.6.2	Мерзляк А.Г., Поляков В.М.; под ред. В.Е. Подольского	Геометрия	8	ООО «Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ»
1.1.2.4.3.6.3	Мерзляк А.Г., Поляков В.М.; под ред. В.Е. Подольского	Геометрия	9	ООО «Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ»
1.1.2.4.3.7.1.	Погорелов А.В.	Геометрия	7—9	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.2.4.3.8.1	Смирнова И.М., Смирнов В.А.	Геометрия	7—9	ООО «ИОЦ МНЕМОЗИНА»
1.1.2.4.3.9.1	Шарыгин И.Ф.	Геометрия	7—9	ООО «ДРОФА»
1.1.2.4.3.10.1	Смирнов В.А., Смирнова И.М.	Геометрия	7	ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»
1.1.2.4.3.10.2	Смирнов В.А., Смирнова И.М.	Геометрия	8	ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»
1.1.2.4.3.10.3	Смирнов В.А., Смирнова И.М.	Геометрия	9	ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»
1.1.3.4	МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА (ПРЕДМЕТНАЯ ОБЛАСТЬ)			
1.1.3.4.1	Математика (учебный предмет)			
1.1.3.4.1.1.1	Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Ткачева М.В. и др.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (углубленное обучение)	10—11	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.3.4.1.2.1	Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия (углубленное обучение)	10—11	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.3.4.1.3.1	Бутузов В.Ф., Прасолов В.В.; под ред. В.А. Садовничего	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия (углубленное обучение)	10—11	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.3.4.1.4.1	Вернер А.Л., Карп А.П.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия	10	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.3.4.1.4.2	Вернер А.П., Карп А.П.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия	11	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.3.4.1.5.1	Гусев В.А., Рубин А.Г.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия (углубленное обучение)	10	ООО «Баласс»

Порядковый номер учебника	Автор/ авторский коллектив	Наименование учебника	Класс, для которого учебник разработан	Наименование издателя(-ей)
1.1.3.4.1.5.2	Гусев В.А., Рубин А.Г.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия (углубленное обучение)	11	ООО «Баласс»
1.1.3.4.1.6.1	Козлов В.В., Никитин А.А., Белоносов В.С. и др.; под ред. В.В. Козлова и А.А. Никитина	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия (углубленное обучение)	10	ООО «Русское слово»
1.1.3.4.1.6.2	Козлов В.В., Никитин А.А., Белоносов и др.; под ред. В.В. Козлова и А.А. Никитина	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия (углубленное обучение)	11	ООО «Русское слово»
1.1.3.4.1.7.1	Колягин Ю.М., Ткачева М.В., Федорова Н.Е. и др.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (углубленное обучение)	10	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.3.4.1.7.2	Колягин Ю.М., Ткачева М.В., Федорова Н.Е. и др.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (углубленное обучение)	11	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.3.4.1.8.1	Часть 1: Мордкович А.Г., Семенов П.В.; Часть 2: Мордкович А.Г. и др.; под ред. А.Г. Мордковича	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (в 2 частях)	10–11	ООО «ИОЦ МНМОЗИНА»
1.1.3.4.1.9.1	Часть 1: Мордкович А.Г., Семенов П.В.; Часть 2: Мордкович А.Г. и др.; под ред. А.Г. Мордковича	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (в 2 частях) (углубленное обучение)	10	ООО «ИОЦ МНМОЗИНА»
1.1.3.4.1.9.2	Часть 1: Мордкович А.Г., Семенов П.В.; Часть 2: Мордкович А.Г. и др.; под ред. А.Г. Мордковича	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (в 2 частях) (углубленное обучение)	11	ООО «ИОЦ МНМОЗИНА»
1.1.3.4.1.10.1	Муравин Г.К., Муравина О.В.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа	10	ООО «ДРОФА»
1.1.3.4.1.10.2	Муравин Г.К., Муравина О.В.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа	11	ООО «ДРОФА»
1.1.3.4.1.11.1	Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (углубленное обучение)	10	АО «Издательство "Просвещение"»

Порядковый номер учебника	Автор/ авторский коллектив	Наименование учебника	Класс, для которого учебник разработан	Наименование издателя(-ей)
1.1.3.4.1.11.2	Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (углубленное обучение)	11	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.3.4.1.12.1	Погорелов А.В.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия	10–11	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.3.4.1.13.1	Смирнов В.А., Смирнова И.М.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия	10	ООО «Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ»
1.1.3.4.1.13.2	Смирнов В.А., Смирнова И.М.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия	11	ООО «Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ»
1.1.3.4.1.14.1	Смирнова И.М.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия	10–11	ООО «ИОЦ МНЕМОЗИНА»
1.1.3.4.1.15.1	Смирнов В.А., Смирнова И.М.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия (углубленное обучение)	10	ООО «ИОЦ МНЕМОЗИНА»
1.1.3.4.1.15.2	Смирнов В.А., Смирнова И.М.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия (углубленное обучение)	11	ООО «ИОЦ МНЕМОЗИНА»
1.1.3.4.1.16.1	Шарыгин И.Ф.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия	10–11	ООО «ДРОФА»
1.1.3.4.1.17.1	Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Полонский В.Б., Якир М.С.; под ред. В.Е. Подольского	Математика: алгебра и начала математического анализа	10	ООО «Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ»
1.1.3.4.1.17.2	Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Полонский В.Б., Якир М.С.; под ред. В.Е. Подольского	Математика: алгебра и начала математического анализа	11	ООО «Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ»
1.1.3.4.1.18.1	Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Полонский В.Б., Якир М.С.; под ред. В.Е. Подольского	Математика. Геометрия	10	ООО «Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ»
1.1.3.4.1.18.2	Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Полонский В.Б., Якир М.С.; под ред. В.Е. Подольского	Математика. Геометрия	11	ООО «Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ»
1.1.3.4.1.19.1	Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия (углубленное обучение)	10	АО «Издательство "Просвещение"»

Порядковый номер учебника	Автор/ авторский коллектив	Наименование учебника	Класс, для которого учебник разработан	Наименование издателя(-ей)
1.1.3.4.1.19.2	<i>Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И.</i>	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия (углубленное обучение)	11	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.3.4.1.20.1	<i>Муравин Г.К., Муравина О.В.</i>	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (углубленное обучение)	10	ООО «ДРОФА»
1.1.3.4.1.20.2	<i>Муравин Г.К., Муравина О.В.</i>	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (углубленное обучение)	11	ООО «ДРОФА»
1.1.3.4.1.21.1	<i>Потоскуев Е.В., Звавич Л.И.</i>	Математика. Геометрия (углубленное обучение)	10	ООО «ДРОФА»
1.1.3.4.1.21.2	<i>Потоскуев Е.В., Звавич Л.И.</i>	Математика. Геометрия (углубленное обучение)	11	ООО «ДРОФА»
1.1.3.4.1.22.1	<i>Пратусевич М.Я., Столбов К.М., Головин А.Н.</i>	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (углубленное обучение)	10	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.3.4.1.22.2	<i>Пратусевич М.Я., Столбов К.М., Головин А.Н.</i>	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (углубленное обучение)	11	АО «Издательство "Просвещение"»
1.1.3.4.1.23.1	<i>Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Поляков В.М.;</i> под ред. В.Е. Подольского	Математика: алгебра и начала математического анализа (углубленное обучение)	10	ООО «Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ»
1.1.3.4.1.23.2	<i>Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Поляков В.М.;</i> под ред. В.Е. Подольского	Математика: алгебра и начала математического анализа (углубленное обучение)	11	ООО «Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ»
1.1.3.4.1.24.1	<i>Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Поляков В.М.;</i> под ред. В.Е. Подольского	Математика. Геометрия (углубленное обучение)	10	ООО «Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ»
1.1.3.4.1.24.2	<i>Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Поляков В.М.;</i> под ред. В.Е. Подольского	Математика. Геометрия (углубленное обучение)	11	ООО «Издательский центр ВЕНТАНА-ГРАФ»

Н. АВИЛОВ,
avilow@rambler.ru,
ст. Егорлыкская, Ростовская обл.
Фото предоставлены автором



Ведущий рубрики — Николай Авилов — на фоне своей коллекции головоломок



«СТРЕЛКА ЮНОНЫ»

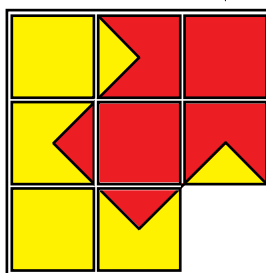
■ Наверное, каждому из нас доводилось передвигать фишки с числами и наводить натуральный порядок в популярной игре «15» или, как ее ласково называют, «Пятнашки». Идея перемещения фишек внутри коробки позволяет придумывать все новые и новые головоломки такого типа. Японский дизайнер Джуничи Янаноэ придумал интересный вариант этой головоломки на поле 3×3 , с которым сейчас и познакомимся.

Головоломка содержит восемь квадратных фишек, расположенных в квадратной лотке 3×3 и раскрашенных в два цвета — красный и желтый — так, что на игровом поле изображена красная стрелка, направленная вверх-вправо. За счет одного свободного места фишки можно поочередно передвигать, при этом изображение красной стрелки ломается.

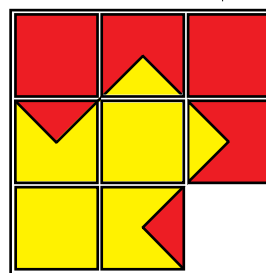
Если продолжать перемещать фишки, то может случиться чудо: на поле появится желтая стрелка, направленная вниз-влево!

В этом и заключается смысл этой головоломки: перемещая фишки, преобразовать красную стрелку в желтую, причем противоположно направленную. То есть нужно поменять и цвет, и направление стрелки.

Начальная позиция



Конечная позиция



Нужно заметить, что головоломка содержит одинаковые фишки — две красных и две желтых, и помнить о том, что существует известная проблема пятнашек — нарушение четности перестановок. Это значит, что если поменять местами только две красные фишки (что внешне совершенно незаметно), то на игровом поле возникнет ситуация, которую невозможно разрешить. Лишь только когда играющий поменяет местами желтые фишки, число перестановок станет четным и головоломка решится. Конечно, менять местами фишки нужно по правилам, не вынимая их из лотка.

В головоломках такого типа интересно найти решение за наименьшее количество ходов. Ходом считается перемещение одной из фишек на свободное место. Мне известно решение головоломки за 26 ходов. Возможно, вам удастся найти более короткое решение, в таком случае присылайте его в редакцию, мы опубликуем его в журнале.



Об авторе: Джуничи Янаноэ (Junichi Yananose) — известный японский разработчик головоломок, который создал ряд головоломок, отмеченных наградами на международных конкурсах. В сообществе любителей головоломок его зовут Юнона, что и отражено в названии этой головоломки.



Есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

63

РАДИАЦИОННАЯ ОПАСНОСТЬ

Знак радиационной опасности представляет собой равносторонний треугольник желтого цвета с черным контуром. В него вписан круг, разделенный на 6 равных частей, три из которых имеют черный цвет (при построении указаны штриховкой). В центре конфигурации расположен черный круг меньшего радиуса, от которого и отходят эти три черных лепестка — один вниз и два в стороны и вверх. Пропорции рисунка: центральный круг радиусом R , три лепестка с внутренним радиусом $1,5R$ и внешним $5R$, лепестки отстоят друг от друга на 60° .

Знак радиационной опасности является предупреждающим и предназначен для привлечения внимания к объектам потенциальной или действительной опасности вредного воздействия ионизирующего излучения.

Международный знак радиации впервые появился в 1946 году в радиационной лаборатории Калифорнийского университета в Беркли.

ПОСТРОЕНИЕ

