МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ № 6 (815)
ИЗДАЕТСЯ С 1992 г.

ТЕМА НОМЕРА

Новое и старое
в обучении геометрии

ПРАКТИКУМ

Замечательный
равнобедренный
треугольник
с. 25

ТЕХНОЛОГИИ

Виртуальная доска как
один из инструментов
для проведения
дистанционного урока
с. 28

ПЕДСОВЕТ

Математическая
грамотность:
разговор экспертов
с. 34

МАТЕМАТИКА В СИМВОЛАХ

МАТЕМАТИКА

Методический журнал
для учителей математики
Издается с 1992 г.
Выходит 10 раз в год

Издательство МЦНМО
БОЛЬШОЙ ВЛАСЬЕВСКИЙ ПЕР., 11,
МОСКВА, 119002

Издается совместно с
РОССИЙСКОЙ АССОЦИАЦИЕЙ
УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
Страничка журнала на сайте РАУМ:
raum.math.ru/node/179

8 (499) 241-89-79
mat@mccme.ru
mat@1september.ru

По вопросам распространения
обращаться по телефону (499) 745-80-31
e-mail: biblio@mccme.ru

Иллюстрации:
www.flickr.com, smachno.ua
pixabay.com, clipart-library.com
yeshwanthbv.files.wordpress.com

Зарегистрировано ПИ №ФС77-66437 от 14.07.16 в Роскомнадзоре

Подписано в печать: 10.07.2020
Тираж: 3000 экз.
Для получения доступа
к журналу «Математика»
в электронном виде
необходима регистрация
школы в системе «СтатГрад».
Подробнее см. на сайте
statgrad.org/#2619
ISSN 2658-4042

Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул Интернациональная. д 100. корп. 8,
тел. +7 (831) 216-40-40.
Номер заказа __________

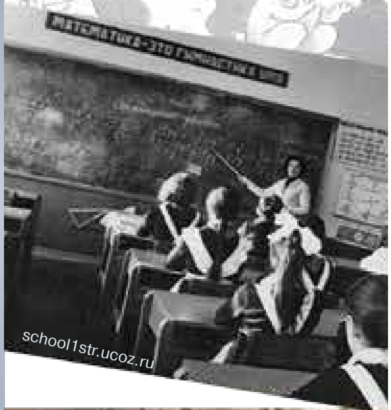
ТЕМА НОМЕРА: НОВОЕ И СТАРОЕ В ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ

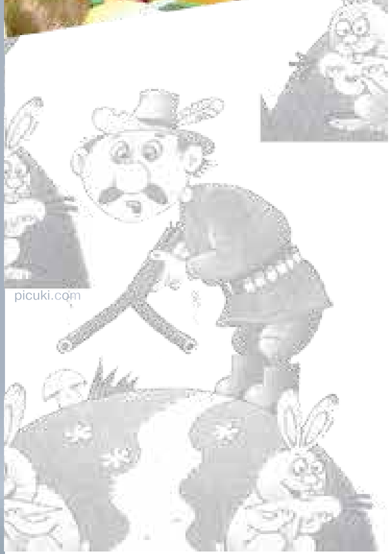
В НОМЕРЕ

К статьям, обозначенным этим символом, есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

КАК УБИТЬ ДВУХ ЗАЙЦЕВ

Л. РОСЛОВА





В XX веке мир стремился к стабильности, в XXI стало понятно, что изменения неизбежны, что происходить они будут постоянно и с такой скоростью, что хорошо бы за ними угнаться. Не минуют эти процессы и школьное образование.

Не успели в мире осознать пользу и вред цифровых технологий, как оказалось, что мы уже живем в эпоху непрерывной цифровой трансформации образования. Репетиция перехода в дистанционный формат обучения, организованная ковидом, прошла, результаты не очень радужные, но все равно придется идти вперед. Назад дороги нет!

При этом опыт России по организации дистанционного обучения на фоне пандемии признан одним из наиболее успешных в мире. По мнению Министра просвещения Сергея Кравцова, был использован комплексный подход, при котором помощь оказывалась учителям, детям и их родителям, и была создана мультимедийная платформа, объединившая три формата: классические учебники в электронной форме, электронное обучение и телевизионные образовательные программы. С нового учебного года Минпросвещения планирует в некоторых регионах провести эксперимент по развитию (и осмыслению?) дистанционного обучения, намечена реализация проекта «Цифровая образовательная среда».

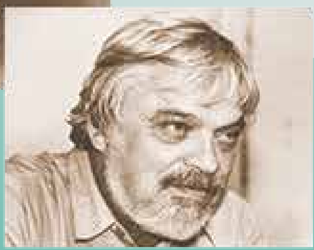
В других странах тоже преуспевают на ниве модернизации, но идут иными путями, делая акцент на содержание обучения, а не на технологии. В Канаде, например, принята новая программа для учащихся 1–8-х классов, акцент в которой сделан на математику, программирование и обучение финансовой грамотности. Новая концепция образования в этой стране строится на том, чтобы с самого первого года обучения давать детям математические знания через целенаправленное формирование навыков использования математики в повседневной жизни.

У нас же реформа содержания — изменения во ФГОС — пока не движется с места. Да и новыми и современными назвать изменения, которые уже много раз обсуждались, никак нельзя. А с течением времени продукт, как известно, портится. Возможно, поэтому акцент сместился в сторону модернизации технологий. Но ведь платформы и прочие ресурсы останутся мертвыми без создания соответствующих им новых методик. Сами по себе технические средства и среды, soft и hard, не заработают.

У кого в итоге получится убить двух зайцев — и преимущества классики сохранить, и использовать новые технологические возможности — покажет время.

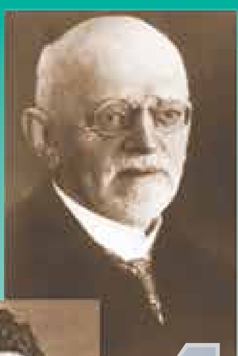
П. БИБИКОВ,
К. КОЗЕРЕНКО,
А. МАЛАХОВ,
г. Москва

УРОКИ ГЕОМЕТРИИ В ЛИЦЕЕ «ВТОРАЯ ШКОЛА»

Простое собрание фактов столь же мало является наукой, как куча камней — домом.
Анри Пуанкаре






По традиции, обучение геометрии в школе должно состоять в отработке, так сказать, базовых навыков и умений: заметить равные треугольники, вычислить угол, используя сумму углов треугольника, доказать параллельность прямых и так далее, сложилась очень давно. Большинство задач при этом оказываются никак друг с другом не связаны, ничем не мотивированы и сваливаются на школьника как бы «с неба».

Нередко учитель просто формулирует задачу, не уделяя внимания таким вопросам, как: «Откуда эта задача взялась?», «Как она связана с другими задачами?», и уж тем более «Как догадаться до формулировки этой самой задачи?». Если учесть, что при этом многие задачи и выглядят довольно вычурно, то становится понятно, что так «дом не построишь, а получишь только кучу камней».

При этом, как правило, отсутствуют глубокие и содержательные результаты, последовательно осваивая которые школьники могли бы:

а) повысить как свой уровень владения материалом, так и свои навыки выстраивать сложные многоходовые рассуждения, используя весь арсенал имеющихся у них средств;

б) познакомиться с наукой и понять, как она создается и как устроена.

После такого обучения стоит ли удивляться отсутствию интуиции и вкуса у школьников. И, кстати говоря, вполне уместно подумать о том, что должно остаться в головах учащихся после прохождения курса геометрии.

Мы прекрасно понимаем, что очень быстро после окончания школы бывшие ученики забудут почти все, чему их учили на уроках геометрии, «поскольку большинство школьных геометрических знаний не востребовано ни в практической жизни человека, ни даже в научной деятельности» [1]. Что же должно остаться? Что выдает геометрия, так сказать, «на гора»? Ради чего она включена в школьную программу? Вопросы, согласитесь, очень важные. От ответа на них зависит, как и чему надо уделять внимание на уроках. Сошлемся на авторитеты и приведем несколько высказываний известных математиков в качестве ответа.

Борель Эмиль [2]: «По существу *образование ума* при помощи точных знаний гораздо важнее, чем приобретение этих знаний». И еще: «Главная цель преподавания — приучать учеников к строгому мышлению».

Пуанкаре Анри [3]: «Математическое доказательство представляет собой не просто какое-то нагромождение умозаключений. Это

Есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

умозаключения, расположенные в известном порядке, причем этот порядок расположения элементов оказывается гораздо более важным, чем сами элементы». Так вот, надо научиться «чувству, так сказать, *интуиции этого порядка*, так что можно обозреть одним взглядом все рассуждения в целом».

Шарыгин И.Ф. [1]: «Научной и нравственной основой курса геометрии является *принцип доказательности* всех (!) утверждений. И это единственный школьный предмет, включая даже предметы математического цикла, полностью основанный на последовательном выводе всех утверждений!»

Успенский В.А. [4]: «Способность отличать осмысленное от бессмысленного и истинное от ложного следует неуклонно и неназойливо прививать уже с начальных классов школы. И не является ли это главным в школьном преподавании?»

Итак, надо приучать учеников к строгому мышлению! Но мы хотим быть правильно понятыми и не перепугать тех [5], кто призывает учителей «быть реалистами и не пытаться научить строгим определениям с самого начала». На наш взгляд, о многих вещах надо сначала просто рассказывать, и не только не требовать, но и не ожидать немедленного понимания. Семя, так сказать, будет брошено в землю, и надо подождать, пока оно прорастет. Впрочем, и здесь нужно «чувство меры и сообразности». Надо обязательно придерживаться принципа *Константинова Н.Н.* [6] о «честном умолчании», который подразумевает, что если учитель в каком-то месте либо пропустил (умолчал) объяснение, понимая, что ученики воспримут соответствующий факт как нечто естественное и не вызывающее возражений, либо просто сослался на очевидность, то добавить строгое рассуждение можно, *не разрушая структуры курса*.

Итак, надо строить строгий логический курс геометрии, который у нас (как, наверное, и в большинстве других школ) состоит:

– из обсуждения и комментариев к теории;
– решения и разбора задач;
– рассказов об истории геометрии.

Поговорим подробнее о каждом из приведенных выше пунктов.

Теорию мы даем по учебнику А.В. Погорелова, в котором, на наш взгляд, удалось адаптировать аксиоматический метод Д. Гильберта для школы. Это методическое достижение трудно переоценить. Читая «Основания геометрии» Гильберта или «Высшую геометрию» Н.В. Ефимова, невозможно представить, что такой подход мог бы быть реализован в школе.

Однако стоит напомнить, что учебник Погорелова подвергся очень жесткой критике ряда специалистов ([7], [5], [1], [8] и др.). Например, *Винберг Э.Б.* [8] считает «концепцию Погорелова полностью несостоятельной». Поэтому объясним, почему мы все-таки выбираем этот учебник.

Суть претензий к подходу Погорелова сводится к двум вещам.

Первое — это то, что «автор учебника сам не всегда выдерживает установленный им уровень строгости и иногда вопреки своей установке прибегает к наглядным представлениям» [8]. Так, например, критики обращают внимание на отсутствие доказательства того, что точка разбивает прямую на два луча. На это замечание можно ответить следующим образом. Во-первых, соответствующее доказательство очень простое и дано Погореловым в его книге «Геометрия» ([9], с. 173), так что каждый учитель может с ним ознакомиться. То же можно сказать и по поводу других замечаний, вроде вопроса о существовании биссектрисы угла. Во-вторых, отношение школьников к подобным вещам вполне удовлетворяет, на наш взгляд, принципу Константинова о «честном умолчании».

Второе — утверждается, что стремление доказывать очевидные утверждения «не может быть правильно понято 12–13-летними детьми», особенно если от них «требуется во всех рассуждениях пользоваться только аксиомами и уже доказанными теоремами». Отсюда делается вывод, что «учебник не только не способен пробудить интереса к геометрии, но может вызвать ее неприятие».

Что тут можно возразить? Конечно, не надо перебарщивать! Если же, как показывает наш опыт, обратить внимание детей на то, что надо, вообще говоря, доказывать даже то, что две (!) медианы в треугольнике пересекаются, то вы приведете их в восторг (особенно, если они будут четко понимать, что спрашивать их это не будут)! И такая реакция вполне объяснима. Подобные утверждения дети воспринимают как парадокс. А парадокс друг не только гениев, но и детей!

Изучая теорию, мы обращаем особое внимание на то, как вводятся понятия. Скажем, можно ли понять или, как считают многие, создать наглядный образ, что такое движение, исходя из его определения? Нет конечно! Но самое главное, что и не надо!

Например, из определения поворота как композиции осевых симметрий сразу и не догадаешься, причем здесь поворот. Как говорил нам один наш коллега: «Ваш поворот не поворачивает». Так вот, определение не должно «поворачивать». Не царское это дело! Для этого есть солдаты-теоремы.

Очень важно приучать школьников к тому, что это типичный для математики подход: сначала дается формальное определение, так сказать, логическое ядро понятия, а затем теоремы (основные свойства), которые, являясь расширением этого ядра, помогают понять суть понятия. Кроме этого, еще необходимы мотивировки и ключевые примеры. Все это вместе составляет *когнитивный блок*.

Что касается движения, то соответствующий блок состоит из определения (движение есть преобразование плоскости, сохраняющее расстояние между точками), доказательства того, что движение переводит прямую в прямую и сохраняет углы, примеров движения и мотивировок. Кстати говоря, центральная, осевая симметрии, поворот и параллельный перенос как примеры движений мы стараемся ввести раньше. Мотивировками здесь служат определение равенства фигур и обобщения понятия движения, о чем стоит поговорить поподробнее. Обратить внимание на то, что равенство фигур — это математическое понятие, и не такое уж и простое. Рассказать об аффинных и проективных преобразованиях, об Эрлангенской программе Клейна, о топологии и дифференциальной геометрии.

И конечно, говоря о движении, надо обязательно отметить следующие его свойства: движение переводит биссектрису угла в биссектрису, ортоцентр треугольника в ортоцентр, описанную около треугольника окружность в описанную окружность, окружность Эйлера в окружность Эйлера и т.д. Все эти свойства являются элементами так называемого функционального мышления в геометрии, которое очень важно поставить и развивать. Если владеть этим приемом, тогда, например, следующая задача легко решается (правда, там надо применить точно такие же свойства, но для подобий).

Задача № 5115. (*Ресурс ИПС «Задачи по геометрии» 30 уровня сложности; см. http://zadachi.mccme.ru/2012/#&page512.)* Пусть A_1, B_1 и C_1 — основания высот AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC. Докажите, что прямые Эйлера треугольников AB_1C_1, BA_1C_1 и CA_1B_1 пересекаются на окружности девяти точек треугольника ABC.

Говоря о движениях, надо обязательно доказать теорему о том, что два движения, значения которых для трех точек, не лежащих на одной прямой, совпадают, равны (то есть у них совпадают значения для всех точек). Отсюда вытекают два очень важных следствия. Во-первых, любое движение есть композиция не более трех осевых симметрий (как говорят математики, осевые симметрии порождают группу движений). Во-вторых, любое движение есть либо тождественное преобразование, либо осевая симметрия, либо поворот, либо параллельный перенос, либо скользящая симметрия. Последняя теорема — пример задачи о классификации.

Следующее понятие, о котором мы хотим поговорить, это вектор. Прежде всего мы различаем направленный отрезок и вектор. Так, направленный отрезок — это отрезок с упорядоченными концами, а вектор — это множество направленных отрезков, которые могут быть совмещены параллельным переносом. Для того чтобы сложить два вектора, мы выбираем по представителю каждого вектора, которые «торчат» из одной точки, складываем их по правилу параллелограмма, и вектор, который содержит получившийся направленный отрезок, называем их суммой. Отметим, что мы работаем с множествами, мысля их как единое целое. Здесь мы встречаемся с очень важным приемом введения новых понятий в математике, который называется факторизацией. К этому моменту школьники с ним уже сталкивались. Это основное свойство дроби, когда много дробей являются одним числом. Там, чтобы сложить два числа, тоже выбирают по представителю, а именно дроби с одинаковым знаменателем, складывают их числители, и число, которое содержит получившуюся дробь, называют их суммой. Очень похоже, и очень важно отметить эту аналогию.

Отметим, что вектор в физике и вектор в геометрии не совсем одно и то же, поскольку физический вектор связан либо с материальной точкой, либо с телом. Подробности смотри в [10].

Также полезно для будущего сделать следующее замечание. Отметим на плоскости точку. Тогда множество векторов и плоскость с отмеченной точкой — это одно и то же, или, как говорят математики, они изоморфны. В самом деле, каждой точке сопоставим вектор, который представляется направленным отрезком с началом в отмеченной точке и концом в этой точке.

Такие разговоры, на наш взгляд, устраняют разрывы в математическом образовании.

К такому достаточно серьезному разрыву может привести понятие скалярного произведения. Чтобы избежать его, надо объяснить, что скалярное произведение есть симметрическая, билинейная функция. Это не так трудно и страшно, как кажется. Дальше, имея такую функцию, можно определить расстояние между точками на плоскости как квадратный корень из скалярного квадрата вектора и ввести меру углов по известной формуле.

Используя разложение вектора по двум неколлинеарным направлениям (по базису), мы можем получить еще одно скалярное произведение.

В самом деле, для этого перемножим сначала первые координаты двух векторов, потом вторые и сложим эти произведения. Поскольку базисов много, то и скалярных произведений много! И, стало быть, много мер углов. Отсюда, в частности, вытекает, что перпендикулярность прямых — понятие относительное!

Обидно, на наш взгляд, проходить рядом с такими вещами и не обратить на них внимания.

Но и это еще не все! Рассмотрим преобразование плоскости f, для которого

$$f(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})=\lambda f(\vec{a})+\mu f(\vec{b}),$$

где λ и μ — произвольные числа, а $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные векторы. Очевидно, что тогда f переводит отмеченную точку в отмеченную точку, а любую прямую в прямую. Если при этом f сохраняет еще скалярное произведение, то оно является хорошо нам знакомым движением плоскости. Математики называют такие преобразования ортогональными. Добавив к ортогональным преобразованиям параллельные переносы, мы получим множество всех движений.

Редко кто из студентов самостоятельно заметит, что ортогональные преобразования, которые появляются у них в курсе линейной алгебры, и школьные движения — это одно и то же!

Следующее понятие, которое нуждается в комментариях — это подобие. Прежде всего необходимо подчеркнуть, что подобие, как и движение, является преобразованием плоскости, которое также переводит прямую в прямую и сохраняет углы между полупрямыми.

Примером подобия является гомотетия, и других примеров, вообще говоря, нет. Например, легко доказать, что любое подобие есть композиция гомотетии и движения.

Несколько слов о площади. Это очень сложное понятие (по существу, интеграл). Наверное, стоит предварительно договориться с учащимися и разрешить им при решении задач пользоваться стандартными формулами площадей. Когда же дело дойдет до определений и доказательств, то надо особо подчеркнуть, что площадь действительно нуждается в определении. Сделать это можно так. Привести пример фигуры (скажем, ковер Серпинского), которая не имеет площади (помните, «семя брошено в землю» и т.д.). После этого, может быть, станет понятнее, почему доказательства вроде бы простых формул такие сложные.

Теперь поговорим о задачах. Самое сложное для учителя заключается в их подборе. В большинстве задачников по геометрии, как нам кажется, нет системы. Мы предлагаем, так сказать, сюжетный подход. Наш задачник [11] начинается с задачи, на которую обычно не обращают особого внимания. А у нас она становится краеугольным камнем для всех сюжетов. Мы имеем в виду задачу о медиане прямоугольного треугольника. Дальше в произвольном треугольнике проводятся две высоты, после чего появляется шесть (!) прямоугольных треугольников, причем четыре из них увидеть легко, а найти два других — трудная, но увлекательная задача (на рис. 1 высоты из вершин B и C не проведены, но указаны их основания — точки H_B и H_C соответственно).

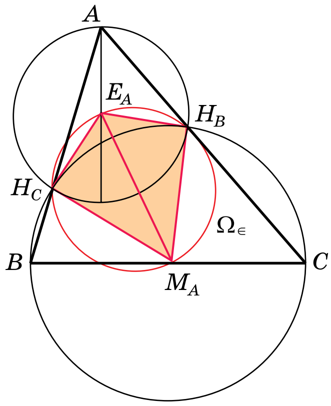


Рис. 1

Эти два прямоугольных треугольника вместе образуют дельтоид. Дельтоид — очень важная производная фигура каждого треугольника. В дальнейшем с ее помощью будут решены многие классические задачи. Так вот, четыре вершины этого дельтоида лежат, в силу первой задачи, на одной окружности. Это окружность девяти точек или окружность Эйлера. И она появляется в самом начале курса. А знать для этого надо всего лишь признаки равенства треугольников, свойства равнобедренного треугольника и сумму углов треугольника. После этого ясно, что делать дальше: «посадить» на эту окружность остальные пять точек (рис. 2).

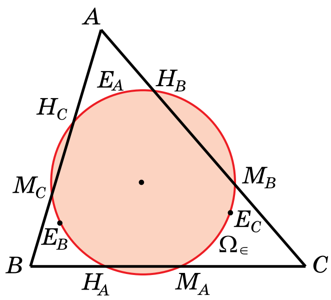


Рис. 2

Но самое удивительное, что окружность Эйлера в нашем подходе становится рабочей лошадкой, хотя обычно соответствующая теорема преподносится как финальный результат.

Заметим, что совершенно естественно здесь у нас появляются, например, средние линии треугольника, которые сразу же начинают работать.

Следующий объект, который в задачнике появляется довольно рано, — это треугольник, вершинами которого являются центры вневписанных окружностей (рис. 3).

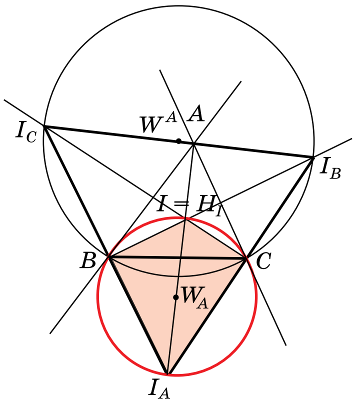


Рис. 3

Этот треугольник мы называем I-треугольником, и его появление тоже не случайно! Дело в том, что окружность девяти точек I-треугольника является описанной около исходного треугольника окружностью. Таким образом, тот факт, что около треугольника можно описать окружность, находится дальше от аксиом, чем теорема об окружности девяти точек. Удивительно! Впрочем, классическое доказательство этого факта мы тоже, конечно, приводим.

Разумеется, новый объект тоже начинает трудиться. С его помощью вводятся так называемые точки W с нижними и верхними индексами, причем наше определение также отличается от классического. Благодаря этому, например, теорема о трезубце тривиально вытекает из определения.

То, о чем только что шла речь, является для нас проявлением *принципа удобных определений*. Он заключается в том, что надо давать такие определения, с помощью которых в дальнейшем будет легко доказывать теоремы. И, конечно, все это надо обсуждать с учениками. В данном случае, если воспользоваться определением точки W с нижним индексом как точки пересечения биссектрисы угла треугольника и описанной около него окружности, то доказательство той же теоремы о трезубце становится довольно сложным.

Здесь же проявляется еще одна особенность нашего подхода. Это *принцип совпадения точек.*

В данном случае точка W с нижним индексом исходного треугольника совпадает с одной из замечательных точек I-треугольника, а именно с серединой отрезка, соединяющего точку пересечения высот с его вершиной. Из этого, например, немедленно вытекает, что точка W лежит на описанной окружности и что исходный треугольник является I-треугольником для его ортотреугольника.

Кроме I-треугольника, очень полезным оказывается и треугольник, гомотетичный исходному, где центр гомотетии есть ортоцентр, а коэффициент гомотетии равен двум. С помощью этого треугольника легко доказывается, например, что точки, симметричные точке H относительно стороны треугольника или относительно середины этой же стороны, лежат на описанной окружности.

К неожиданным ответам приводят задачи на восстановление, в которых требуется построить треугольник по трем из девяти сохранившихся точек на окружности Эйлера. Некоторые из них имеют два, четыре, а в случае, если от треугольника остался, например, только дельтоид, даже бесконечное число решений.

Очень интересно и естественно появляется в нашем задачнике еще одна окружность. Например, пусть CL и CL' — биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника ABC (рис. 4).

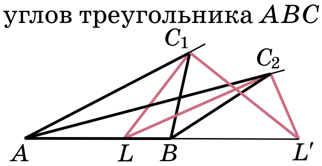


Рис. 4

Тогда, как известно,

$$\frac{AL}{BL} = \frac{AL'}{BL'} = \frac{AC}{BC},$$

и возникает вопрос: как устроено геометрическое место вершин C. Ответ на вопрос — окружность Аполлония (рис. 5), что позволяет открыть совершенно удивительные факты и теоремы.

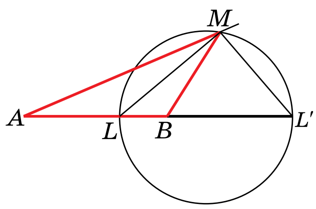


Рис. 5

И, что самое главное, эти факты и теоремы органично вписываются в школьный курс геометрии и связывают воедино такие, казалось бы, далекие друг от друга понятия, как координаты, биссектрисы, замечательные точки треугольника, окружность Эйлера, точки W, задачи Фаньяно, Шарыгина, и даже теорему синусов. Кроме этого, окружность Аполлония — это подготовка плацдарма для введения инверсии, полюсов и поляр. Заметим еще, что для освоения этого материала достаточно владеть геометрией на уровне восьмого класса.

Одним из ключевых понятий в курсе школьной геометрии является «гомотетия». Это обусловлено несколькими причинами. Во-первых, гомотетия является формализацией наглядного образа, связанного с раздутием или сжатием фигур. Поэтому она, как правило, легче воспринимается и лучше узнается при решении задач. Во-вторых, гомотетия является примером преобразования плоскости, что позволяет привнести в геометрию совершенно новую технику, новый, так называемый, функциональный язык. На наш взгляд, чрезвычайно важно научить школьников понимать этот язык и разговаривать на нем. В-третьих, гомотетия позволяет решать очень сложные задачи.

Наконец, на уроках геометрии мы уделяем много внимания истории геометрии. Например, когда речь заходит о координатах, конечно, обсуждается вопрос о том, зачем Декарту понадобились декартовы координаты, а когда появляется прямая Эйлера, мы рассказываем, откуда она взялась, какую цель преследовал при этом Эйлер.

Но, пожалуй, самым важным из таких разговоров является история появления геометрии Лобачевского. Во-первых, открытие этой геометрии — это первый результат мирового класса, полученный российским математиком. Во-вторых, и это очень важно, до сих пор (а на дворе XXI век) программы по геометрии составлены так, что наши школьники (и не только школьники) не в состоянии ее понять. В свое время геометрию Лобачевского не принимали такие крупные математики, как Артур Кэли и Карл Вейерштрасс. Но они считали, что в рассуждениях Лобачевского есть, может быть, глубоко запрятанная ошибка. А наши дети знают, что Лобачевский — великий математик, но не могут себе представить, как через точку, не лежащую на прямой, можно провести более одной прямой, параллельной данной. Эта ситуация является наиболее ярким примером того, что мы называем *неявными блокировками*. «Неявными», потому что никто специально не формирует неправильный интуитивный образ. Обычно он является результатом привыкания, а затем и абсолютизации определенного вида рисунков. Лобачевский является создателем аксиоматического метода, оторванного от наглядности. Таким образом, чтобы разблокировать интуицию, надо развивать у школьников аксиоматическое мышление.

И еще нужно сказать по этому поводу вот что. Евклидова гомотетия и инверсия оказываются движениями в геометрии Лобачевского (в модели Пуанкаре), что является отражением важнейшего принципа: *«В каждой новой геометрии ищи аналог движения!»* Вот что позволит использовать Евклидову интуицию в новой ситуации!

Кроме того, для изучения геометрии Лобачевского не хватает обычно времени ни в школе, ни в вузе. Она располагается в нашем математическом образовании на, так сказать, «ничьей земле», хотя очень развивает математическую культуру. Отметим, что на ничьей земле оказывается и проективная геометрия. Подобные обстоятельства, как мы уже говорили выше, разрывают образование. Поэтому надо сделать все возможное, чтобы устранить эти разрывы и подготовить школьников к продолжению серьезного математического образования.

В заключение добавим, что такие разделы, как геометрия Лобачевского или проективная геометрия, традиционно относят к факультативным, и может сложиться впечатление, что поместить их в основной курс геометрии в школе невозможно. Однако наш опыт говорит об обратном! При правильной постановке математической интуиции некоторые разделы геометрии Лобачевского естественно включаются в курс планиметрии во втором полугодии 9-го класса, а о проективной геометрии можно говорить со школьниками после освоения базовой стереометрии во второй половине 10-го класса.

Литература

1. *Шарыгин И.Ф.* Нужна ли школе 21-го века геометрия? // Математическое просвещение, 2004, сер. 3, вып. 8. **2.** *Борель Э.* Как согласовать преподавание в средней школе с прогрессом науки // Математическое просвещение, 1958, сер. 2, вып. 3. **3.** *Пуанкаре А.* О науке. — М.: Наука, 1983. **4.** *Успенский В.А.* Математическое и гуманитарное: преодоление барьера. — М.: МЦНМО, 2011. **5.** *Шень А.Х.* О «математической строгости» и школьном курсе математики. — М.: МЦНМО, 2006. **6.** Интервью с Константиновым Н.Н. // Квант, 2010, № 1. **7.** *Александров А.Д.* О строгости изложения в учебном пособии А.В. Погорелова // Математика в школе, 1985, № 5. **8.** *Винберг Э.Б.* О концепции учебника геометрии А.В. Погорелова // Математическое просвещение, 2015, сер. 3, вып. 19. **9.** *Погорелов А.В.* Геометрия. — М.: Наука, 1983. **10.** *Соловьев Ю.В.*, *Сосинский А.Б.* Геометрия скользящих векторов // Квант, 1985, № 8. **11.** *Бибиков П.В.*, *Козеренко К.В.*, *Малахов А.И.* Геометрические сюжеты // (готовится к публикации).

А. ШЕВКИН,
avshevkin@mail.ru,
г. Москва

ЗАДАЧИ НА ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Использованы задачи 75 и 77 из книги *Готман Э.Г., Скопец З.А.* Решение геометрических задач аналитическим методом (М.: Просвещение, 1979).

Сначала разберем решения более простых задач.

Задача 1. Докажите, что если $ABCDE$ — правильный пятиугольник и N — точка пересечения диагоналей AC и BE, то $AB^2 = AN \cdot AC$.

Решение. Способ I. Пусть M — точка пересечения диагоналей AC и BD (рис. 1).

Внутренний угол правильного пятиугольника равен 108°. Так как вписанные углы EAD, DAC и CAB равны, то каждый из них содержит по 36°. Биссектриса DM треугольника DAC делит его на два равнобедренных треугольника, в которых

$$DC = DM = AM. \qquad (*)$$

При этом треугольники DAC и CDM подобны по двум углам, из подобия треугольников следует, что

$$\frac{MC}{DC} = \frac{DC}{AC},$$

откуда получаем:

$$DC^2 = MC \cdot AC.$$

Учитывая, что

$$DC = AB,\ MC = AN,$$

окончательно имеем:

$$AB^2 = AN \cdot AC,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Первый способ решения задачи показан ради равнобедренного треугольника ADC, разделенного биссектрисой DM на два подобных треугольника так, что достигается равенство (*). Это поможет решить задачу 4.

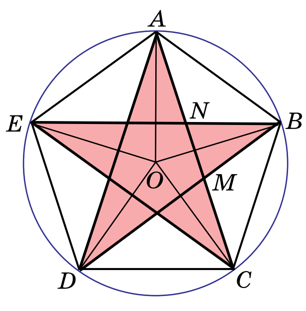


Рис. 1

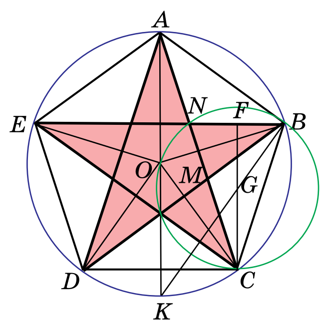


Рис. 2

Способ II. Доказываемое равенство приводит к мысли: нельзя ли построить окружность, в которой AB — касательная, а AC и AN — секущая и ее внешняя часть соответственно? Такую окружность построить можно (рис. 2).

Пусть K — точка пересечения луча AO и окружности, описанной около правильного пятиугольника. Угол ABK прямой, так как он вписанный и опирается на диаметр окружности. В равнобедренном треугольнике BCN проведем серединный перпендикуляр к отрезку BN.

Пусть G — точка пересечения отрезков CF и BK. Углы BCF и CBK равны как половины равных углов. Следовательно, $BG = CG$.

Точка G лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BN. Следовательно, $BG = GN$ и G — центр окружности, описанной около треугольника BCN. Причем для этой окружности AB — касательная ($\angle ABK$ прямой), а AC и AN — секущая и ее внешняя часть соответственно.

По теореме о квадрате касательной имеем:

$$AB^2 = AN \cdot AC,$$

что и требовалось доказать.

Задача 2. Докажите, что если A, B, C, D — последовательные вершины правильного восьмиугольника, то

$$\frac{1}{AB^2} - \frac{1}{AD^2} = \frac{2\sqrt{2}}{AC^2}.$$

Решение. Рассмотрим окружность радиуса R, описанную около правильного восьмиугольника (рис. 3).

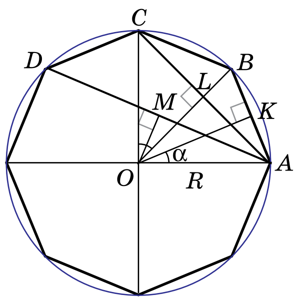


Рис. 3

Обозначим половину центрального угла AOB через α. Тогда

$$AB = 2AK = 2R\sin\alpha,$$
$$AC = 2AL = 2R\sin 2\alpha,$$
$$AD = 2AM = 2R\sin 3\alpha.$$

AC^2 найдем по теореме Пифагора: $AC^2 = 2R^2$, поэтому

$$\frac{2\sqrt{2}}{AC^2} = \frac{2\sqrt{2}}{2R^2} = \frac{\sqrt{2}}{R^2}.$$

Так как $\alpha = \dfrac{90^\circ}{4}$, а $3\alpha = 90^\circ - \alpha$, то

$$\sin 3\alpha = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha,$$

поэтому

$$\frac{1}{AB^2} - \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{4R^2\sin^2\alpha} - \frac{1}{4R^2\sin^2 3\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{4R^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{\cos 2\alpha}{R^2\sin^2 2\alpha} = \frac{\cos 45^\circ}{R^2\sin^2 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{R^2}.$$

Тем самым требуемое равенство доказано.

Задача 3. (77) Докажите, что если A, B, C, D — последовательные вершины правильного семиугольника, то

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}. \qquad (**)$$

Решение. Рассмотрим окружность радиуса R, описанную около правильного семиугольника (рис. 4).

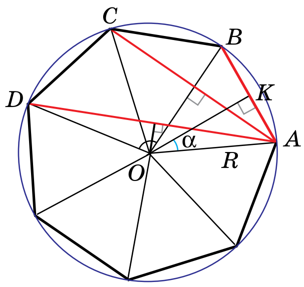


Рис. 4

Обозначим половину центрального угла AOB через α, $\alpha = \dfrac{180^\circ}{7}$. Тогда

$$AB = 2R\sin\alpha,\ AC = 2R\sin 2\alpha,\ AD = 2R\sin 3\alpha.$$

Надо доказать равенство

$$\frac{1}{2R\sin\alpha} = \frac{1}{2R\sin 2\alpha} + \frac{1}{2R\sin 3\alpha}$$

или, что то же самое, равенства

$$\sin 3\alpha \sin 2\alpha = \sin 3\alpha \sin\alpha + \sin 2\alpha \sin\alpha,$$
$$2\sin 3\alpha \cos\alpha = \sin 3\alpha + \sin 2\alpha.$$

Применив в левой части последнего равенства формулу

$$2\sin x \cos y = \sin(x + y) + \sin(x - y),$$

получим равенства:

$$\sin 4\alpha + \sin 2\alpha = \sin 3\alpha + \sin 2\alpha,$$
$$\sin 4\alpha = \sin 3\alpha.$$

Так как

$$\sin 4\alpha = \sin\frac{720^\circ}{7} = \sin\left(90^\circ + \frac{90^\circ}{7}\right) = \cos\frac{90^\circ}{7},$$

$$\sin 3\alpha = \sin\frac{540^\circ}{7} = \sin\left(90^\circ - \frac{90^\circ}{7}\right) = \cos\frac{90^\circ}{7},$$

то равенство $\sin 4\alpha = \sin 3\alpha$ доказано, что и доказывает требуемое равенство (**).

Задачи для самостоятельного решения

4. Докажите, что:

а) $\cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$;

б) $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

5. (75) В окружность радиуса R вписан правильный десятиугольник $ABCD$... Докажите, что $AD - AB = R$.

А. ПЛУТОВА,
г. Ростов-на-Дону

ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С ТРЕУГОЛЬНИКОМ, В УЧЕБНИКАХ ГЕОМЕТРИИ

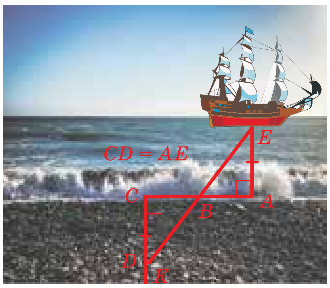
В данной статье приведен анализ системы заданий, связанных с теорией треугольника, в учебниках по геометрии для учащихся 7–9-х классов.

Одна из самых простейших фигур геометрии — треугольник. Эта фигура лежит в основе многих более сложных геометрических фигур, а также предметов, строений и др. Высказывание великого древнегреческого философа Платона в полной мере описывает значимость треугольника: «Поверхность состоит из треугольников».

Великий предшественник Платона Фалес Милетский, который ввел в математику само требование доказательства, доказал первые теоремы, пользуясь равенством и подобием треугольников. С помощью треугольника были решены знаменитые практические задачи:

1. Определение расстояния от корабля до берега — метод равенства треугольников (рис. 1).
2. Определение высоты пирамиды по ее тени — метод подобия треугольников (рис. 2).

С той поры равенство и подобие треугольников являются основными методами при решении не только планиметрических задач, но и задач стереометрии.



Дальномер Фалеса

Рис. 1. Измерение расстояния до корабля от берега

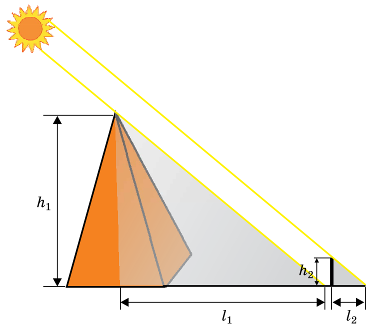


Рис. 2. Измерение высоты пирамиды по ее тени
h_1 — высота пирамиды, h_2 — высота палки; l_1 — длина тени пирамиды, l_2 — длина тени палки.

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{l_1}{l_2} \Rightarrow h_1 = \frac{l_1 \cdot h_2}{l_2}$$

В курсе геометрии основной школы (7–9-й классы) геометрия треугольника занимает важное место, так как большое количество задач решается с использованием равенства и подобия треугольников. Задача учителя — обеспечить овладение этими методами учащимися, но прежде необходимо создать для этого условия.

Во-первых, учащиеся должны знать теорию треугольника: свойства различных видов треугольников и их элементов, признаки равенства и признаки подобия треугольников.

Во-вторых, учащихся необходимо научить пользоваться этой теорией при решении простейших задач, в процессе решения которых они знакомятся со свойствами и признаками данной геометрической фигуры, учатся распознавать ее виды, то есть происходит формирование представлений о треугольнике.

Только после этого учащиеся могут приступать к решению более сложных задач, которые сводятся к нахождению равных или подобных треугольников в более сложных геометрических конструкциях и использованию известных учащимся свойств, признаков и др.

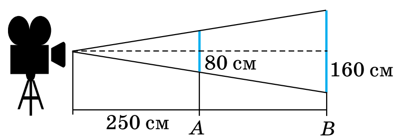
Приведем пример одной простейшей задачи, для решения которой достаточно знать лишь одно свойство или признак треугольника, и пример одной более сложной задачи, в которой необходимо найти треугольник и воспользоваться его свойством или признаком.

1 (*[4, с. 70], задача № 232*). В треугольнике ABC медиана BK перпендикулярна стороне AC. Найдите угол ABC, если $\angle ABK = 25°$.

2 (*[6, с. 18], задача № 69*). Две стороны треугольника равны 12 см и 14 см, а медиана, проведенная к третьей стороне, равна 7 см. Найдите неизвестную сторону треугольника.

Банк заданий, связанных с геометрией треугольника, представленный в различных УМК для учащихся 7–9-х классов, дает возможность не только сформировать у обучаемых пространственное мышление, но и основательно подготовиться к сдаче основного государственного экзамена и единого государственного экзамена. Приведем примеры такого рода заданий.

3 (*ОГЭ-2013, [10]*). Проектор полностью освещает экран A высотой 80 см, расположенный на расстоянии 250 см от проектора. На каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) от проектора нужно расположить экран B высотой 160 см, чтобы он был полностью освещен, если настройки проектора остаются неизменными?



4 (*ЕГЭ-2018, [9]*). Сторона AB треугольника ABC равна 1. Противолежащий ей угол C равен 30°. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Задачи, непосредственно связанные с теорией треугольника, часто являются ключевыми в решении более сложных геометрических задач не только средней, но и старшей школы. Их решение развивает логическое и алгоритмическое мышление учащихся, способствует мотивации введения более сложных понятий, основанных на теории треугольника, а также помогает в усвоении предмета. Таким образом, в учебниках геометрии должна быть сформирована система заданий, связанных с геометрией треугольника.

Поэтому и возникла идея проведения анализа учебно-методических комплектов по геометрии 7–9-х классов [1–7] с точки зрения содержания в них заданий, связанных с теорией треугольника. Осмелюсь предположить, что причиной отказа от выполнения задания или затруднений учащихся в решении геометрической части при сдаче ОГЭ и ЕГЭ является в том числе недостаточное внимание к решению задач, связанных с теорией треугольника.

Для подтверждения этой гипотезы проведем количественный анализ заданий в учебниках геометрии, входящих в федеральный комплект. Выберем три учебно-методических комплекса (УМК) следующих авторов: В.А. и И.М. Смирновых [2], С.А. Козловой и др. [3], А.Г. Мерзляка и др. [4–6]. Определим в каждом из учебников процентное отношение заданий, связанных с теорией треугольника, к общему количеству заданий учебника. Сведем полученные данные в таблицу.

Авторский коллектив	Класс	Всего заданий в учебнике	Из них с треугольниками	Процент от общего числа
Смирнова И.М., Смирнов В.А.	7	479	164	34
	8	545	181	33
	9	490	51	10
Козлова С.А., Рубин А.Г., Гусев В.А.	7	207	42	20
	8	302	64	21
	9	257	56	22
Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.	7	744	412	55
	8	860	316	37
	9	886	252	29

Из данных таблицы можно сделать следующие выводы: наибольшее количество задач, связанных с теорией треугольника, представлено в УМК А.Г. Мерзляка и др.; более того, к этому УМК разработаны еще и дидактические материалы [7–8], в которых максимальное количество такого рода задач: 50% в пособии для 7-го класса и 40% в пособии для 8-го класса. Таким образом, авторы представляют себе роль равенства и подобия треугольников в школьной геометрии. Учащиеся же, решив столь значительное количество задач, должны овладеть этими понятиями и методами решения задач.

Процентное соотношение анализируемых задач практически во всех УМК снижается от класса к классу — самый низкий процент соответствует учебникам 9-го класса. Например, в УМК Смирновых для учащихся 9-х классов он составляет всего 10%, однако в учебниках этих авторов для 7-х и 8-х классов таких задач достаточное количество — около трети.

Наименьшее количество задач, связанных с теорией треугольника, представлено в УМК С.А. Козловой и др. Они равномерно распределены по классам: 20, 21 и 22% соответственно в 7-м, 8-м и 9-м классах. Представляется, что авторы недооценивают роль методов решения задач, связанных с равенством и подобием треугольников, в дальнейшем изучении геометрии: система задач недостаточна для формирования умений, требуемых для их применения.

Охарактеризуем, какого рода задачи, связанные с теорией треугольника, предлагаются в учебниках.

На страницах учебников геометрии семиклассники впервые знакомятся с теорией треугольника и, как следствие, рассматривают большое количество простейших задач. Чаще всего они связаны с изображением и обозначением основных элементов треугольника: сторон, вершин, высот, медиан и биссектрис, также присутствуют задачи на распознавание видов треугольника. Такого рода задачи требуют минимальных знаний по данной теме. Некоторые задачи требуют знания и умения применять формулы, теоремы из теории треугольника (признаки равенства треугольников, периметр треугольника, сумма углов треугольника и др.). Семиклассники впервые выполняют построение треугольника по различным заданным элементам с помощью циркуля и линейки. Заметим, что анализ задач на построение в учебниках геометрии проведен в статье А.В. Белошистой [1], некоторые приемы анализа использованы при подготовке этой публикации.

Восьмиклассники встречаются с заданиями, связанными со сравнением элементов треугольника на основе теоремы Фалеса, признаками подобия треугольников. Здесь появляются и задачи, решаемые с помощью теоремы Пифагора. Они требуют овладения не только теорией треугольника, но и теорией окружности, вписанной в треугольник и описанной около него, параллелограмма, трапеции и др. Таким образом, идет интенсивное применение теории треугольника в новых ситуациях. Как следствие, и объем заданий, связанных с треугольником, может быть почти идентичным объему заданий для семиклассников.

В сравнении с системами заданий, связанных с теорией треугольника, предыдущих двух лет обучения система аналогичных заданий для девятиклассников количественно значительно уменьшилась. Это связано с тем, что теории треугольника в курсе 9-го класса отводится одна глава в самом начале изучения, и она более похожа на повторение уже пройденного материала, чем на знакомство с чем-то новым. Так, например, задания по своей сути схожи с заданиями из курса 7-го класса (найти неизвестный элемент).

Итак, проведенный нами анализ задач, связанных с теорией треугольника, подтверждает наше предположение о том, что система такого рода задач в учебнике может быть недостаточной для формирования представлений учащихся об одном из самых эффективных методов решения геометрических задач. У учащихся при этом могут не сформироваться умения пользоваться методом, что вполне может сказаться на результатах ОГЭ и ЕГЭ.

Литература

1. *Белошистая А.В.* Задачи на построение в школьном курсе геометрии // Математика в школе, 2002, № 9.

2. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Геометрия: 7–9 класс: учебник для общеобразовательных учреждений. — М.: Мнемозина, 2017.

3. *Козлова С.А.* и др. Геометрия: 7–9 класс: учебник для организаций, осуществляющих общеобразовательную деятельность. — М.: Баласс, 2015.

4. *Мерзляк А.Г.* и др. Геометрия: 7 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций. — М.: Вентана-Граф, 2015.

5. *Мерзляк А.Г.* и др. Геометрия: 8 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций. — М.: Вентана-Граф, 2013.

6. *Мерзляк А.Г.* и др. Геометрия: 9 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций. — М.: Вентана-Граф, 2014.

7. *Мерзляк А.Г.* и др. Геометрия: дидактические материалы: 7 класс: пособие для учащихся общеобразовательных организаций. — М.: Вентана-Граф, 2018.

8. *Мерзляк А.Г.* и др. Геометрия: дидактические материалы: 8 класс: пособие для учащихся общеобразовательных организаций. — М.: Вентана-Граф, 2018.

9. Сдам ГИА: Решу ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. — Режим доступа: math-ege.sdamgia.ru/test?id=19848884 (Дата обращения 24.09.2019).

10. Сдам ГИА: Решу ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. — Режим доступа: math-oge.sdamgia.ru/test?filter=all&category_id=65 (Дата обращения 24.09.2019).

7 класс

Е. ЭРГЛЕ,
г. Москва

ПОСОБИЯ ПРОЕКТА «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ВЕРТИКАЛЬ»

В данной статье мы продолжаем разговор о пособиях, поддерживающих московский городской образовательный проект «Математическая вертикаль». Цель данного проекта — многоцелевая предпрофильная подготовка в математике и смежных областях. На сегодняшний день в нем участвуют около 450 школ города Москвы. Смысл данного проекта в том, что школы отбирают мотивированных детей в конце 6-го класса и учат математике по углубленной программе в 7–9-х классах. В 2019/2020 учебном году в проекте «Математическая вертикаль» участвовало 395 школ и 31 школа принимала участие в статусе кандидата.

Основную консультационную и методическую поддержку школам оказывают ресурсные центры. Ресурсные центры организуют математические кружки и мероприятия для школьников и курсы повышения квалификации для учителей, проводят совместные мероприятия для обучающихся.

Учебный план по математике включает в себя: 4–5 часов алгебры, 2–3 часа геометрии и 1–2 часа статистики в неделю. Школьники классов «Математической вертикали» обучаются по программам и учебно-методическим пособиям, которые разрабатываются специально для этих классов.

В декабре 2019 года в издательстве «Просвещение» вышли пособия, обеспечивающие содержание образовательного проекта по направлению «Теория вероятностей и статистика. 7–9 классы» и «Геометрия. 7 класс». Сегодня мы представляем вам пособие по геометрии автора М.А. Волчкевича под редакцией И.В. Ященко.

ДАВАЙТЕ РАЗБЕРЁМ НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

★☆☆ **ПРИМЕР 13.1** Прямая пересекает две параллельные в точках A и B. Биссектрисы двух смежных углов с вершиной в точке B при одной из этих прямых пересекают другую параллельную прямую в точках C и E. Докажите, что $AC = AE$.

РЕШЕНИЕ: Угол ACB равен углу MBC, поскольку они накрест лежащие при двух параллельных и секущей BC. Поэтому углы ACB и ABC равны. Значит, треугольник ABC равнобедренный по признаку, то есть $AC = AB$. Также легко доказать, что и треугольник ABE тоже равнобедренный. Поэтому $AE = AB$. Таким образом, $AC = AE$. **Что и требовалось доказать.**

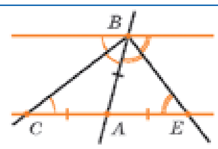
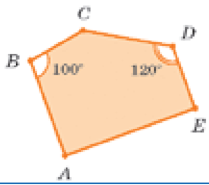


Рис. 13.32



13.14 ★★☆ Попробуйте найти ошибку такого «доказательства» пятого постулата Евклида. Докажем, что через точку C проходит единственная прямая, параллельная AB. Как известно, из точки C можно опустить единственный перпендикуляр CD на AB. К прямой CD можно восстановить единственный перпендикуляр CE. Прямая CE параллельна AB. Поскольку наши построения выполнены единственно возможным образом, то такая прямая только одна (рис. 13.67).

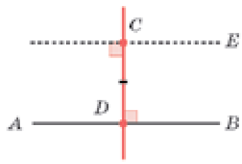


Рис. 13.70

13.15 ★★☆ Как вы уже знаете, в геометрии Лобачевского через одну точку можно провести две пря-

14.1 ★☆☆ Один из углов равнобедренного треугольника равен 50°. Найдите его другие углы. Могут ли быть у задачи различные решения?

14.2 ★☆☆ Один из углов равнобедренного треугольника в два раза больше другого. Найдите этот угол.

14.3 ★☆☆ Биссектриса прямого угла треугольника образует с его противоположной стороной угол 65°. Найдите меньший угол этого треугольника.

★★★ **ПРИМЕР 14.5** На сторонах угла, величина которого равна 50°, взяли точки A, B, C, D так, как это показано на рисунке, причём $AB = BC = CD$ (рис. 14.18, *а*). Найдите угол между прямыми AC и BD.

В общеобразовательной школе предмет «Геометрия» изучается с 7-го класса и, по мнению многих учащихся, является одним из сложнейших школьных предметов. В ряду учебных дисциплин, составляющих в совокупности школьный курс математики, геометрия играет особо важную роль. Эта роль определяется и относительной сложностью геометрии по сравнению с другими предметами математического цикла, и большим значением этого предмета для изучения окружающего мира.

В разное время высказывались различные суждения по поводу преподавания геометрии и ее месте в системе школьного образования. По мнению многих, геометрия в школе — это не только основная математическая дисциплина, но и один из важнейших компонентов общечеловеческой культуры. Геометрия, как учебный предмет, обладает уникальными возможностями для решения главной задачи общего математического образования, целостного развития и становления личности средствами математики. Развитие учащихся средствами геометрии направлено на достижение научных, прикладных и общекультурных целей математического образования, где общекультурные цели обучения геометрии в первую очередь предполагают всестороннее развитие мышления детей.

Нельзя считать, что основная цель преподавания вообще и геометрии в частности состоит в том, чтобы сообщить ученику как можно больше конкретных знаний, новых понятий, теорем. «Многознание уму не научает», — говорил Гераклит.

Многие математические теории при формальном изложении кажутся искусственными, оторванными от жизни, просто непонятными. Если же подойти к этим проблемам с позиции исторического развития, то станет виден их глубокий смысл, их естественность и необходимость. Любая наука могла бы гордиться такой историей, как история геометрии.

В первой главе пособия, которая называется «Первые ученые», представлен обширный исторический материал, рассказывающий об истории открытий в области геометрии, о вкладе в нее ученых.

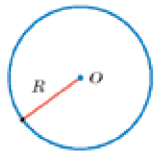
Исторический материал проиллюстрирован большим количеством рисунков, отражающих текст повествования. В любой аудитории возникает положительный эмоциональный эффект при сообщении исторических сведений. Дело здесь в свойственном человеческой природе уважении к прошлому, минувшему, которое, как говорил А.С. Пушкин, отличает образованность от дикости и которое иногда вызывает желание взглянуть на любимую науку через туман старины и поэзии.

Современная школьная программа указывает на необходимость знакомства учеников с фактами из истории математики, но в программе нет конкретных указаний. Школьные учебники математики содержат минимум исторических сведений. На уроке всегда трудно найти время, необходимое для ознакомления с историческим материалом. Но нельзя считать 3–5 минут (не каждый урок!) для сообщения исторических фактов — потерянным временем, надо только преподносить исторический материал в тесной связи с изучаемым материалом. Если начать такую работу с 5-го класса и проводить ее систематически, то со временем исторический элемент станет для самих учащихся необходимой частью урока.

Это надо выучить

Окружность — это множество всех точек на плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии от данной точки.

Данная точка называется **центром окружности**, а указанное расстояние — её **радиусом**.
Окружность с центром в точке O и радиусом R обозначают так: окр $(O; R)$ (рис. 19.4).



Окружность $(O; R)$

ДЛЯ ТЕХ, КТО ХОЧЕТ ЗНАТЬ БОЛЬШЕ

«Я должен ещё подумать!»

Очистить геометрию Евклида от «пятна», доказать знаменитый его пятый постулат пытались на протяжении двадцати веков многие учёные. Вот далеко не полный список этих попыток: Птолемей (II в.), Прокл (IV в.), Ибн Аль Хайсам (X в.), Омар Хайям (XI в.), Насир ад-Дин ат-Туси (XIII в.), Клавий (1514); Катальди (1603), Борелли (1658), Витале (1680), Валлис (1663), Саккери (1733), Ламберт (1766), Бертран (1778), Лагранж (1810), Лежандр (1823).

Известен курьёзный случай, когда Жозеф Луи Лагранж (рис. 13.49), делая доклад в Парижской академии наук со своим доказательством аксиомы параллельных, вдруг оборвал его со словами: «Я должен об этом ещё подумать!»

К началу XIX века количество ошибочных доказательств аксиомы параллельных достигло 55. Николай Лобачевский сказал об этом так: «Напрасные старания в продолжение двух тысяч лет».

Как правило, ошибки всех подобных «доказательств» состояли в том, что их авторы брали на веру какое-нибудь другое очевидное утверждение, из которого они уже строго выводили потом знаменитый пятый постулат Евклида. По сути эти допущения были другими формами того же постулата, то есть все они были эквивалентны ему. Приведём здесь некоторые из них.

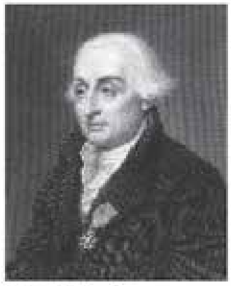

Жозеф Луи Лагранж

Рис. 13.49

Николай Иванович Лобачевский провел 40 лет в Казанском университете, из которых 19 лет был его ректором. Его усилиями этот университет стал одним из лучших в России. Он читал лекции по арифметике, теории вероятностей, алгебре и геометрии, по физике, астрономии и даже гидравлике. Писал учебники для гимназий и заведовал библиотекой. Также его интересовали химия, ботаника и анатомия человека. Известно, что в юности после смерти своего старшего брата, он два года посвятил медицине.

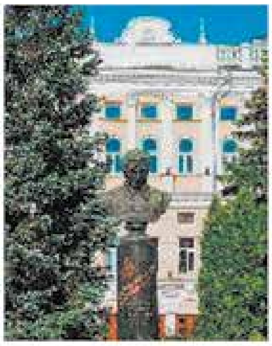
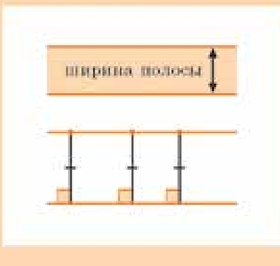


Рис. 13.58

Второе свойство параллельных прямых

Длина перпендикуляра, опущенного из любой точки прямой линии на параллельную ей прямую, постоянна.

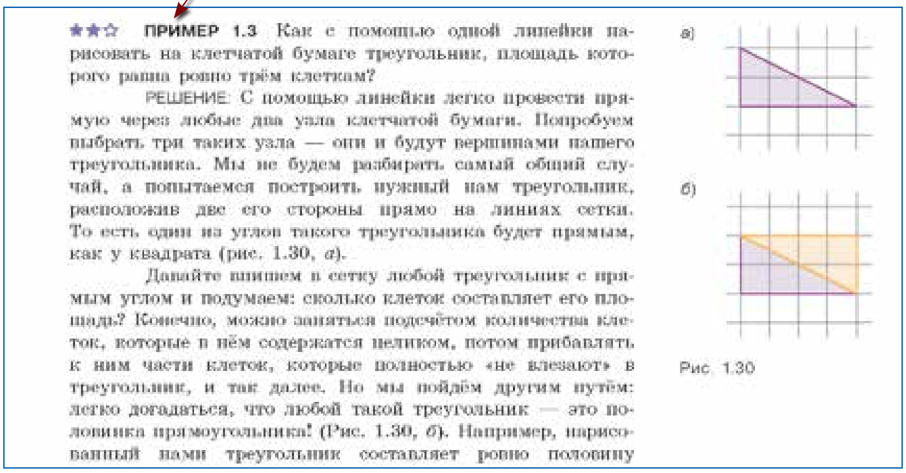
Длину такого перпендикуляра называют расстоянием между **параллельными прямыми** или **шириной полосы** между ними.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:
Возьмём две параллельные прямые и на одной из них отметим две произвольные точки A и B. Опустим из них перпендикуляры AA_1 и BB_1 на параллельную прямую (рис. 13.25). Мы докажем, что $AA_1 = BB_1$. Для этого проведём отрезок A_1B и рассмотрим треугольники AA_1B и A_1BB_1. Прямые AA_1 и BB_1 одновременно перпендикулярны одной прямой, поэтому должны быть парал-


1 Точки и прямые

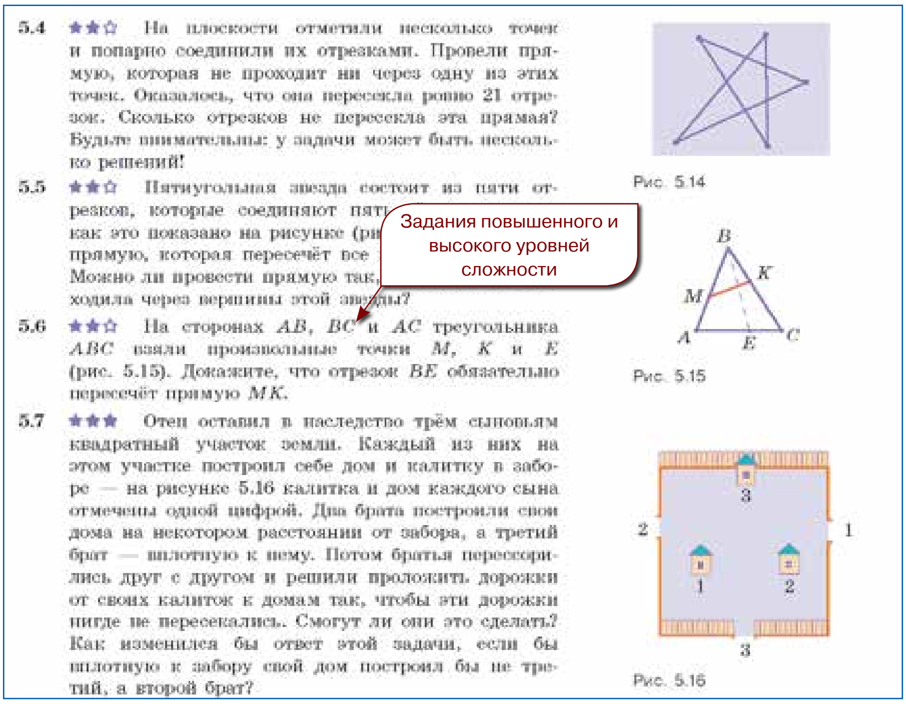
Решение примера повышенной сложности.


★★☆ **ПРИМЕР 1.3** Как с помощью одной линейки нарисовать на клетчатой бумаге треугольник, площадь которого равна ровно трём клеткам?

РЕШЕНИЕ: С помощью линейки легко провести прямую через любые два узла клетчатой бумаги. Попробуем выбрать три таких узла — они и будут вершинами нашего треугольника. Мы не будем разбирать самый общий случай, а попытаемся построить нужный нам треугольник, расположив две его стороны прямо на линиях сетки. То есть один из углов такого треугольника будет прямым, как у квадрата (рис. 1.30, *а*).

Давайте впишем в сетку любой треугольник с прямым углом и подумаем: сколько клеток составляет его площадь? Конечно, можно заняться подсчётом количества клеток, которые в нём содержатся целиком, потом прибавлять к ним части клеток, которые полностью «не влезают» в треугольник, и так далее. Но мы пойдём другим путём: легко догадаться, что любой такой треугольник — это половинка прямоугольника! (Рис. 1.30, *б*). Например, нарисованный нами треугольник составляет ровно половину

Рис. 1.30


5.4 ★★☆ На плоскости отметили несколько точек и попарно соединили их отрезками. Провели прямую, которая не проходит ни через одну из этих точек. Оказалось, что она пересекла ровно 21 отрезок. Сколько отрезков не пересекла эта прямая? Будьте внимательны: у задачи может быть несколько решений!

5.5 ★★☆ Пятиугольная звезда состоит из пяти отрезков, которые соединяют пяти... как это показано на рисунке (ри... прямую, которая пересечёт все ... Можно ли провести прямую так, ... ходила через вершины этой звезды?

5.6 ★★☆ На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяли произвольные точки M, K и E (рис. 5.15). Докажите, что отрезок BE обязательно пересечёт прямую MK.

5.7 ★★★ Отец оставил в наследство трём сыновьям квадратный участок земли. Каждый из них на этом участке построил себе дом и калитку в заборе — на рисунке 5.16 калитка и дом каждого сына отмечены одной цифрой. Два брата построили свои дома на некотором расстоянии от забора, а третий брат — вплотную к нему. Потом братья перессорились друг с другом и решили проложить дорожки от своих калиток к домам так, чтобы эти дорожки нигде не пересекались. Смогут ли они это сделать? Как изменился бы ответ этой задачи, если бы вплотную к забору свой дом построил бы не третий, а второй брат?

Рис. 5.14

Рис. 5.15

Рис. 5.16

Задания повышенного и высокого уровней сложности

Оглавление пособия содержит шесть глав, их содержание обеспечивает весь объем материала образовательного стандарта, а также включает материал, выходящий за его рамки.

В пособии разработана удобная система навигации по учебному и задачному материалу (см. с. 15).

Например, в учебнике есть упражнения нескольких уровней сложности. Уровень сложности отражается количеством закрашенных звездочек слева от номера задания.

Также есть подробный разбор задач всех типов и уровней сложности.

Для контроля, самоконтроля изученного материала, а также для мотивации учащихся узнать немного больше, порассуждать даются вопросы к параграфу. Материал для тех, кто хочет знать больше, в пособии выделен особым значком.

Внутри каждой главы выделен материал, который нужно разобрать более подробно или выучить.

На полях учебника есть сведения, относящиеся к исторической справке, или этимологии математического термина, или незнакомому слову.

Также выделяются определения основных математических понятий, которые нужно знать обязательно.

Глава 1

В первой главе рассматривается пять параграфов: «Геометрические фигуры», «Точка, прямая, плоскость», «Две прямые на плоскости», «Отрезки и лучи», «Полуплоскость».

Каждый параграф главы начинается со вступительного текста, в котором объясняется, какие геометрические фигуры будут изучаться, дается понятие формы со ссылкой на предметы, окружающие нас дома, в природе и т.д.

В каждом параграфе представлены:

– задания с полным разбором решения;

– большой объем задачного материала по изучаемой теме;

– задания высокого уровня сложности;

– задания исследовательского характера;

– исторический материал и материал об ученых, сделавших открытия в области геометрии;

– большой объем иллюстративного материала, сопровождающего изучаемый материал.

Глава 2

Во второй главе рассматриваются три параграфа: «Углы», «Ломаная и многоугольники», «Выпуклые фигуры».

Автор целенаправленно обращается к примерам из практики, что развивает умение учащихся:

вычленять геометрические факты, формы и отношения в предметах и явлениях действительности, использовать язык геометрии для их описания, приобретать опыт исследовательской деятельности, развития идей, проведения экспериментов, обобщения, постановки и формулирования новых задач;

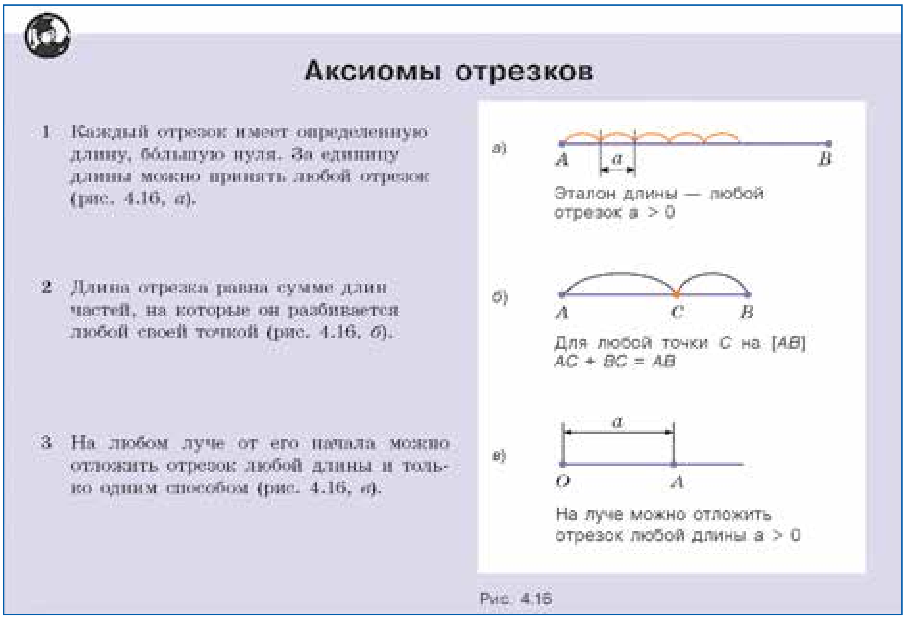
ясного, точного, грамотного изложения своих мыслей в устной и письменной речи;

проведения доказательных рассуждений, аргументаций, выдвижения гипотез и их обоснования;

поиска, систематизации, анализа и классификации информации, использования разнообразных информационных источников, включая учебную и справочную литературу, современные информационные технологии.

Глава 3

В третьей главе рассматриваются четыре параграфа: «Равные фигуры», «Признаки равенства треугольников»,



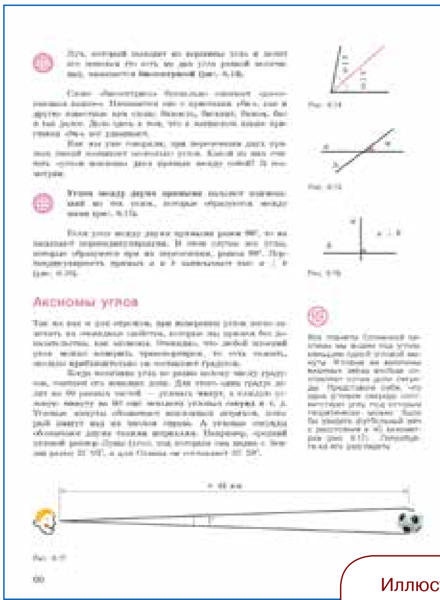
Аксиомы отрезков

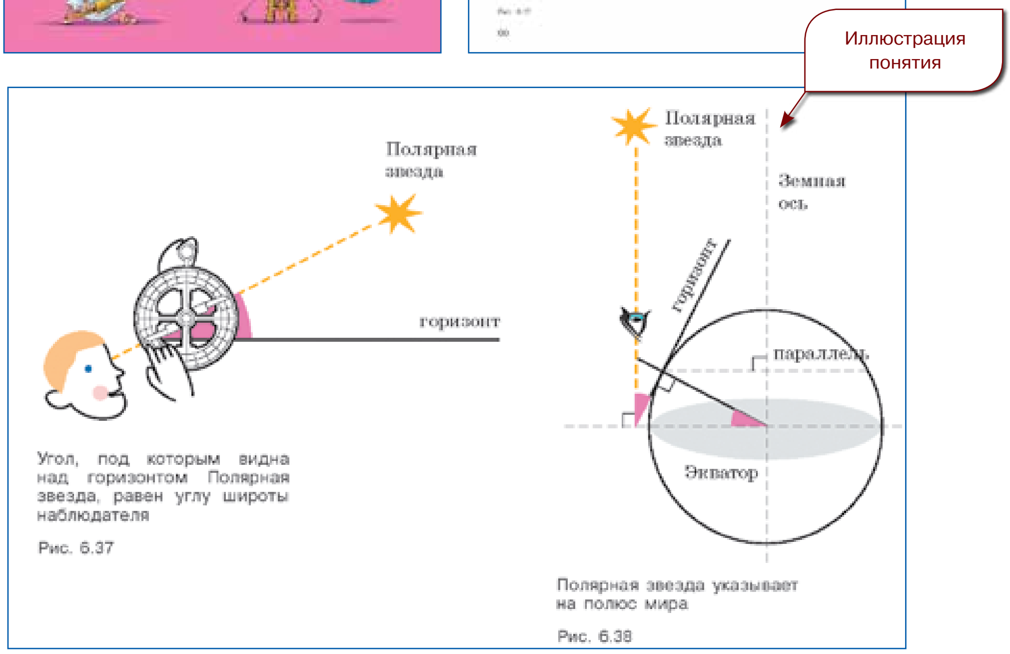
1 Каждый отрезок имеет определенную длину, бо́льшую нуля. За единицу длины можно принять любой отрезок (рис. 4.16, *а*).

2 Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой своей точкой (рис. 4.16, *б*).

3 На любом луче от его начала можно отложить отрезок любой длины и только одним способом (рис. 4.16, *в*).

Рис. 4.16





Угол, под которым видна над горизонтом Полярная звезда, равен углу широты наблюдателя

Рис. 6.37

Полярная звезда указывает на полюс мира

Рис. 6.38

Вводный текст

Что такое признаки равенства?

Рис. 10.1

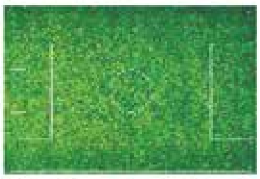


Рис. 10.2

В предыдущем параграфе мы с вами говорили о равенстве геометрических фигур. Давайте вспомним, что геометрические фигуры равны, если можно движением одну из них полностью совместить с другой. Но как применять это правило на практике? Неужели каждый раз придётся их накладывать друг на друга и пытаться физически совмещать! Хорошо ещё, если фигуры можно вырезать из бумаги, а как быть, если они нарисованы на стене (рис. 10.1) или просто очень больших размеров? Посмотрите на футбольное поле: две его половины должны быть абсолютно одинаковыми, но как бы мы их совместили (рис. 10.2)? Сделать это можно только мысленно, проведя рассуждение или доказательство.

Возьмём другой пример. Перед тем как поставить в доме новую дверь, замерщик измеряет высоту и ширину дверного проёма (рис. 10.3), потом по ним изготавливают нужную дверь, и тогда уже её ставят на своё место. Так же и портной снимает нужные мерки с человека, чтобы изготовить одежду по его фигуре. То есть на практике всегда берут какие-то характеристики предмета, по которым однозначно определяют его размеры и форму. Набор таких параметров в геометрии называется **признаком фигуры**.

Вопросы по ходу параграфа

Равенство двух многоугольников

Вернёмся к признакам равенства фигур. В общем случае сформулировать их довольно сложно. Однако для многоугольников существует простое правило. Вы знаете, что два многоугольника равны, если их можно совместить. Но тогда у них должны совпасть все стороны и все углы — потому их и называют соответственными. Оказывается, верно и обратное: если каждой стороне и каждому углу одного многоугольника соответствуют равные им сторона и угол ...кие многоугольники можно будет совместить. ...руем это правило как признак равенства ...ов, но пока примем его без доказательства.

1 Является ли наличие иголок и шишек на дереве признаком ёлки?

2 Назовите признаки или приметы грозы.

Рубрика «Обратите внимание»

Признак равенства многоугольников

Если у двух многоугольников равны все их соответственные стороны и углы, то такие многоугольники равны

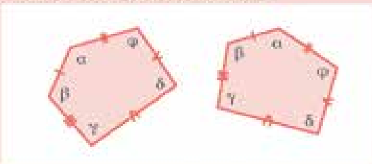


Рис. 10.6

«Симметрия и равнобедренный треугольник», «Третий признак равенства треугольников».

Использование признаков равенства треугольников является мощным геометрическим методом доказательства теорем и решения задач. Важно уже на примере первой теоремы заложить у учащихся правильные представления о равных фигурах, сформировать навыки ее применения. Необходимой предпосылкой для этого является успешное изучение самих признаков равенства.

Метод обучения, используемый автором, преимущественно эвристическая беседа, обязательное наличие обратной связи, предусматривающей закрепление каждого фрагмента данного блока, применение приемов, облегчающих восприятие крупной порции учебного материала.

Средства наглядности — шаблоны фигур на клетчатой бумаге, рисунки, выполняемые при их помощи.

Эвристические ситуации — подведение учащихся к пониманию признаков и предоставление им возможности проявить при этом наблюдательность, догадку, самостоятельность мышления.

Признаки равенства треугольников подводят учащихся к пониманию и доказательству признака равенства многоугольников.

Перед изучением третьего признака равенства треугольников учащимся предлагается подробным образом изучить: свойства и признаки равнобедренного треугольника, существование перпендикуляра из точки, симметрию фигур и т.д. Также разобраны задачи, иллюстрирующие и углубляющие данный материал.

Глава 4

В четвертой главе рассматриваются четыре параграфа: «Параллельные прямые», «Сумма углов треугольника», «Расчет углов в равных треугольниках», «Прямоугольный треугольник».

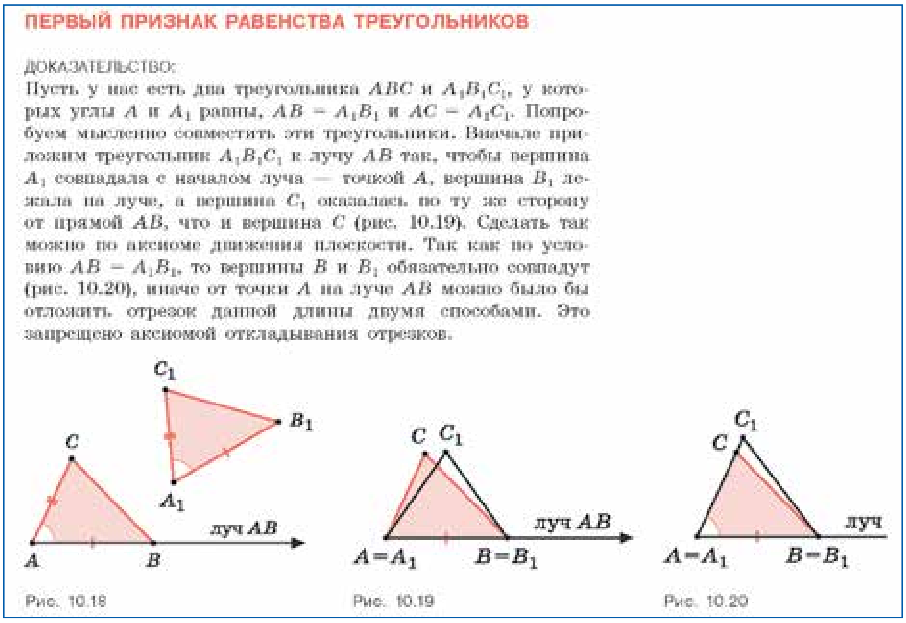
Рассмотрение в школьном курсе геометрии вопроса о взаимном расположении прямых на плоскости и в пространстве имеет очень большое значение.

Знания о взаимном расположении прямых лежат в основе изучения свойств геометрических фигур как в планиметрии, так и в стереометрии. Действительно, параллельность прямых на плоскости является необходимым материалом для изучения свойств многоугольников и окружности; без знания взаимного расположения прямых в пространстве невозможно изучение свойств многогранных углов, многогранников и круглых тел.

Темы о взаимном расположении прямых изучаются сразу же после введения основных понятий геометрии на плоскости и в пространстве, которые используются при доказательстве первых теорем и решении задач. Это позволяет систематически вести работу по развитию логического мышления учащихся, а также способствует прочному и сознательному усвоению ими основных понятий и аксиом и постепенному раскрытию их роли в школьном курсе геометрии.

Изучение взаимного расположения прямых должно сопровождаться решением большого количества задач, среди которых особое место занимают задачи на доказательство.

В процессе решения задач по рисунку у учащихся развиваются пространственные представления, навыки изображения фигур на плоскости,


ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:
Пусть у нас есть два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, у которых углы A и A_1 равны, $AB = A_1B_1$ и $AC = A_1C_1$. Попробуем мысленно совместить эти треугольники. Вначале приложим треугольник $A_1B_1C_1$ к лучу AB так, чтобы вершина A_1 совпадала с началом луча — точкой A, вершина B_1 лежала на луче, а вершина C_1 оказалась по ту же сторону от прямой AB, что и вершина C (рис. 10.19). Сделать так можно по аксиоме движения плоскости. Так как по условию $AB = A_1B_1$, то вершины B и B_1 обязательно совпадут (рис. 10.20), иначе от точки A на луче AB можно было бы отложить отрезок данной длины двумя способами. Это запрещено аксиомой откладывания отрезков.

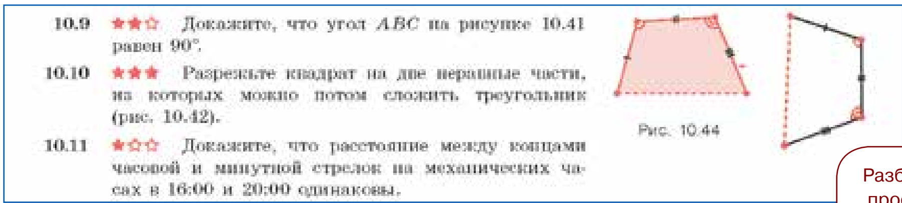
Рис. 10.18 Рис. 10.19 Рис. 10.20


Второй признак равенства треугольников

Если сторона и два прилежащих к ней угла в одном треугольнике соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам в другом треугольнике, то такие треугольники равны.

Треугольники равны по второму признаку

Рис. 10.25


10.9 ★★☆ Докажите, что угол ABC на рисунке 10.41 равен 90°.

10.10 ★★★ Разрежьте квадрат на две неравные части, из которых можно потом сложить треугольник (рис. 10.42).

10.11 ★☆☆ Докажите, что расстояние между концами часовой и минутной стрелок на механических часах в 16:00 и 20:00 одинаковы.

Рис. 10.44

Разбор решения простой задачи


ДАВАЙТЕ РАЗБЕРЁМ НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

Рис. 11.25

Рис. 11.26

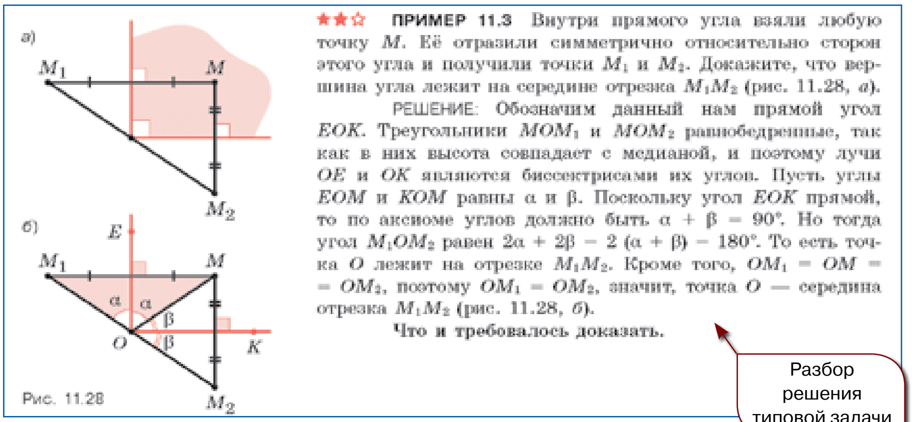
★☆☆ **ПРИМЕР 11.1** Докажите, что в равнобедренном треугольнике равны биссектрисы, проведённые к его боковым сторонам.

РЕШЕНИЕ: Пусть в треугольнике ABC стороны AB и BC равны, CE и AK — биссектрисы треугольника, проведённые к этим сторонам (рис. 11.25). По свойству равнобедренного треугольника его углы при вершинах A и C равны, значит, равны и половины этих углов, то есть угол KAC равен углу ACE. Треугольники AEC и AKC равны по второму признаку, так как сторона AC у них общая, угол CAK равен углу ACE, а угол EAC равен углу KCA. Значит, $AK = CE$ как соответственные стороны равных треугольников.

Что и требовалось доказать.

★☆☆ **ПРИМЕР 11.2** Про четырёхугольник $ABCD$ известно, что у него $AB = BC$, $AD = DC$. Докажите, что диагонали такого четырёхугольника перпендикулярны друг другу (рис. 11.26).

РЕШЕНИЕ: Треугольник ABC равнобедренный, поэтому угол BAC равен углу BCA. Обозначим их величину



★★☆ **ПРИМЕР 11.3** Внутри прямого угла взяли любую точку M. Её отразили симметрично относительно сторон этого угла и получили точки M_1 и M_2. Докажите, что вершина угла лежит на середине отрезка M_1M_2 (рис. 11.28, *а*).

РЕШЕНИЕ: Обозначим данный нам прямой угол EOK. Треугольники MOM_1 и MOM_2 равнобедренные, так как в них высота совпадает с медианой, и поэтому лучи OE и OK являются биссектрисами их углов. Пусть углы EOM и KOM равны α и β. Поскольку угол EOK прямой, то по аксиоме углов должно быть $\alpha + \beta = 90°$. Но тогда угол M_1OM_2 равен $2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 180°$. То есть точка O лежит на отрезке M_1M_2. Кроме того, $OM_1 = OM = OM_2$, поэтому $OM_1 = OM_2$, значит, точка O — середина отрезка M_1M_2 (рис. 11.28, *б*).

Что и требовалось доказать.

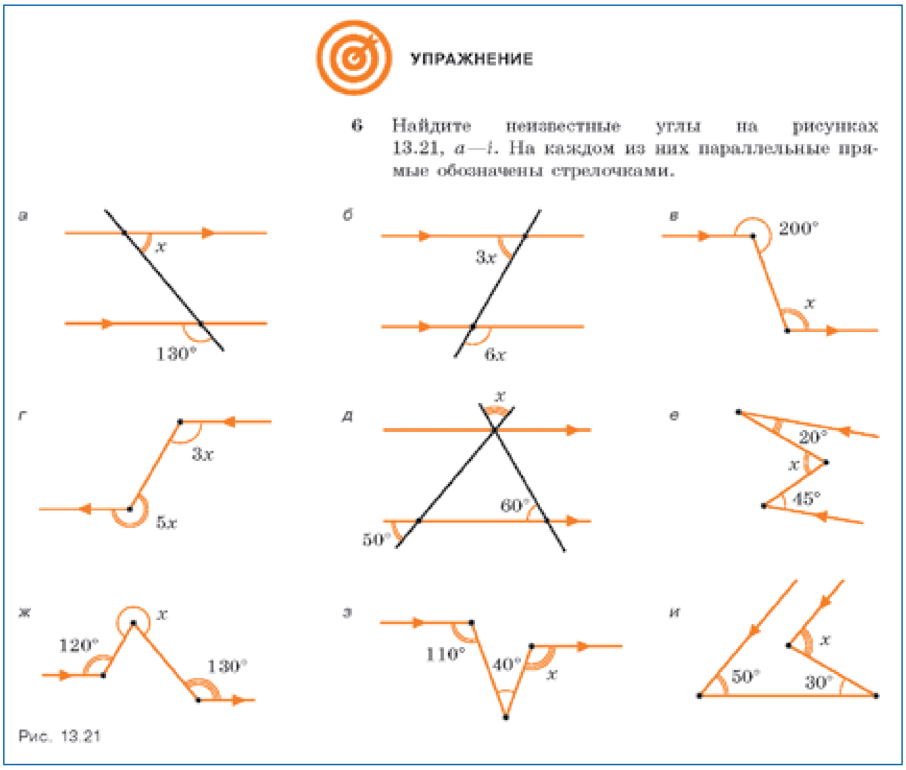
Рис. 11.28

Разбор решения типовой задачи

4 Сумма углов треугольника

§13 Параллельные прямые

Параллельные прямые



УПРАЖНЕНИЕ

6 Найдите неизвестные углы на рисунках 13.21, *а*—*и*. На каждом из них параллельные прямые обозначены стрелочками.

Рис. 13.21

навыки выполнения рисунков к задаче, их правильного восприятия и чтения.

Изложение материала параграфа о сумме углов треугольника характеризуется обращением учащихся к наглядности, использованием рисунков и чертежей на всех этапах обучения и развитием геометрической интуиции на этой основе.

Целенаправленное обращение к примерам из практики развивает умения учащихся вычленять геометрические факты, формы и отношения в предметах и явлениях действительности, использовать язык геометрии для их описания.

Исторически геометрия начиналась с треугольника, поэтому вот уже два с половиной тысячелетия треугольник — символ геометрии, но он не только символ, он — атом геометрии. Треугольник — это важнейшая фигура планиметрии, и поэтому в первую очередь изучают свойства этой фигуры. С ним связаны многие методы, которые используются при решении различных геометрических задач. Любой многоугольник можно разделить на треугольники, а изучение свойств этого многоугольника сводится к изучению составляющих его треугольников. Можно сказать, что изучаемая в школьном курсе геометрия — это геометрия треугольника. Поэтому формирование геометрических понятий рассмотрим на примере формирования у учащихся понятия «треугольник».

В ходе изучения темы в учебнике проводится пропедевтика теоремы Пифагора, которая будет изучаться в 8-м классе. Далее рассматриваются равенство треугольников по двум катетам, по гипотенузе и острому углу, гипотенузе и катету.

Глава 5

В пятой главе рассматриваются два параграфа: «Большая сторона и больший угол в треугольнике», «Неравенство треугольника».

Тема о геометрических неравенствах вызывает трудности у обучающихся. Неравенство треугольника вытекает из важной теоремы о сторонах и углах треугольника.

Если бы мы рисовали путь самолета на глобусе, то сразу бы увидели, что при движении на запад по параллели он летит вовсе не по самому короткому пути между точками. А для самых коротких отрезков на поверхности Земли выполняется то же неравенство, что и для трех точек на плоскости. И называется оно так же, как и на плоскости, неравенством треугольника.

Для более глубокого понимания темы в учебнике рассматривается неравенство периметров двух треугольников и неравенство «резинки».

Материал главы содержит большую подборку задач разного уровня сложности.

Глава 6

В шестой, заключительной главе курса геометрии 7-го класса рассматриваются две темы: «Геометрические места точек» и «Окружность и круг».

«Геометрическое место точек» как понятие прикладного характера играет важную роль для успешного изучения школьного курса геометрии, особенно при решении задач. Поэтому в процессе обучения нужно систематически развивать конструктивные способности и пространственные представления учащихся и уделять особое внимание решению задач на «геометрическое место точек».

Это понятие имеет значение не только в обучении геометрии, но и на практике, на

Пример из практики

Знаете, как плотники или строители проводят параллельные линии? Наивно думать, что для этого они каждый раз проводят секущую прямую и откладывают от неё равные накрест лежащие углы. На практике это было бы слишком сложно. Вспомните, как у вас дома вешают обыкновенные полки. Чтобы полка висела горизонтально, она должна быть параллельна полу — иначе предметы с неё будут падать (рис. 13.26). А как проще всего добиться этой параллельности? Все правильно: точки крепления полки к стене нужно отметить на одинаковой высоте над полом, тогда ваша полка будет висеть «прямо», а не «криво». Расстояние до пола обычно вычисляют по длине отвеса или перпендикуляра к нижнему краю стены.

Знаете, почему так делают? Это простое правило связано с ещё одним признаком параллельных прямых, с которым мы сейчас познакомимся.

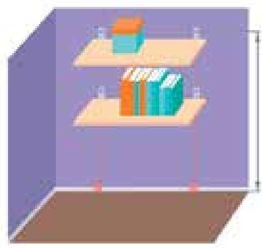


Рис. 13.26

Второй признак параллельных прямых

Если две точки одной прямой лежат по одну сторону от другой прямой и находятся на одинаковых расстояниях от неё, то эти две прямые параллельны.

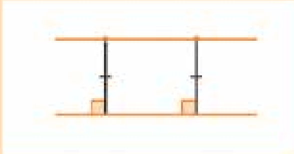


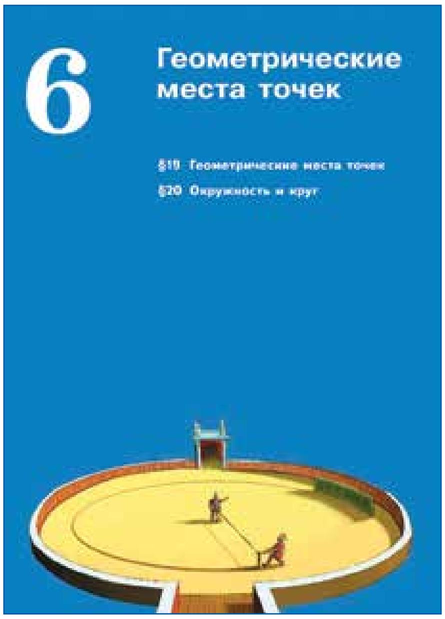
Рис. 13.27

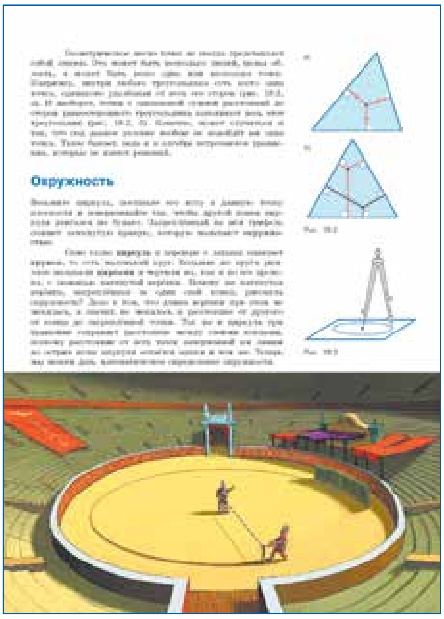
Три уровня сложности примеров на доказательство

★☆☆ **ПРИМЕР 18.2** Одна сторона треугольника равна 4 см, а длины двух других относятся как 3 : 5. Докажите, что периметр треугольника меньше 20 см (рис. 18.20).

★★☆ **ПРИМЕР 18.3** Докажите, что медиана треугольника меньше половины суммы двух его сторон, выходящих из той же вершины.

★★★ **ПРИМЕР 18.5** Внутри квадрата взяли произвольную точку. Докажите, что сумма расстояний от неё до вершин квадрата меньше периметра этого квадрата.


6 Геометрические места точек
§19 Геометрические места точек
§20 Окружность и круг



Какая бы ни была у нас бумага, она всегда ограничена. Плоскость же бесконечна, как и серединный перпендикуляр к нашему отрезку AB. Верно ли, что любая точка данного перпендикуляра будет равноудалена от концов отрезка AB? Можете в этом не сомневаться: для любой такой точки K треугольники AMK и BMK будут равны по первому признаку (рис. 19.19, *б*), ведь стороны AM и BM у них равны, сторона MK общая, а углы между этими сторонами прямые. Значит, для любой точки на перпендикуляре отрезки AK и BK будут равны. Итак, мы с вами получили ещё одно важное геометрическое место точек — **серединный перпендикуляр к отрезку.**

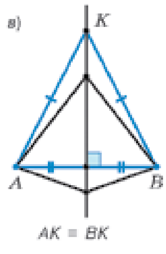


Рис. 19.19

Круг

Знаете, чем круг отличается от окружности? На этот простой с виду вопрос один ученик 7 класса ответил так: «Круг — это блин, а окружность — это форма блина». Другой же сказал ещё интереснее: «Круг закрашен, а внутри окружности пустота!»

Так или иначе, но каждый человек интуитивно понимает, что круг — это то, что находится «внутри» окружности. Можно даже сказать, что для окружности круг — это её внутренняя область. Правда, работать с таким определением не очень удобно.


Рис. 19.8

производстве, в частности, это понятие используется для расчета расстояний при постановке защитных сеток, для определения расстояния между станками, планирования проездов и проходов и т.п. При внедрении норм техники безопасности в промышленности и строительстве такой научный подход уменьшает количество несчастных случаев.

Понятие «геометрическое место точек» конструктивного характера имеет большое образовательное значение, в том числе в связи геометрии с жизнью. Геометрическое место точек как понятие применяется при решении геометрических задач на плоскости и в пространстве. При разборе соответствующих геометрических задач ученикам необходимо иметь пространственное воображение или «видение» фигуры, подлежащей построению. Знакомство учащихся с этим понятием целесообразно начинать с 7-го класса, тогда как некоторые представления у учащихся формируются уже в 5–6-х классах.

Далее рассматривается окружность с основными теоремами и свойствами элементов окружности. Начинается изучение темы, как всегда, с занимательного научного текста об окружности.

В пособии большое место отведено обучению учащихся методам рассуждений, распознавания истинных или ложных высказываний. Представляем рубрику «В чем ошибка?».

Для проверки усвоения теоретического материала после каждого параграфа дается список вопросов, а для самостоятельной работы представлен большой задачный материал трех уровней сложности.

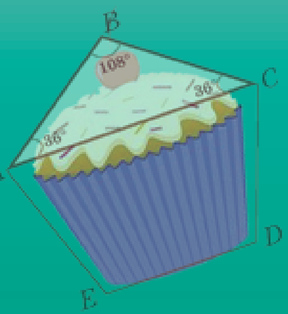
Таким образом, материал данного пособия позволит сформировать у учащихся представления о геометрии как о науке, тесно связанной с жизнью, овладеть методами доказательства, дать представление о свойствах геометрических фигур и развить пространственное мышление, научит применять полученные знания на практике.

В пособии есть материал международных исследований, оценивающих уровень и качество математического и естественно-научного образования учащихся 7–9-х классов основной школы.

Линия учебных пособий по математике для 7-х классов разработана с учетом возрастных и психологических особенностей данного возраста. В данном пособии реализована технология уровневой дифференциации. В ближайшее время планируется выпуск пособий по геометрии для 8-го и 9-го классов образовательных организаций.

Г. ФИЛИППОВСКИЙ,
г. Киев

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК



Мы поведем разговор о равнобедренном треугольнике с углами 108°, 36°, 36°. Он обладает рядом удивительных признаков, которые позволяют назвать этот треугольник *замечательным* и настаивают на отдельном разговоре о нем, что выяснится в процессе решения задач.

Задача 1. Найдите углы треугольника ABC, в котором центры вписанной и описанной окружностей симметричны относительно стороны BC.

Решение. Очевидно, что треугольник ABC равнобедренный (центр I вписанной окружности лежит на серединном перпендикуляре к стороне BC). Он тупоугольный (центр его описанной окружности — точка O — находится вне треугольника).

Пусть отрезок IO пересекает сторону BC в точке K (рис. 1).

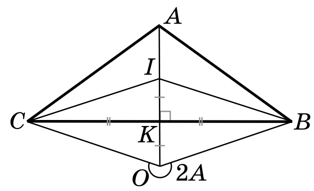
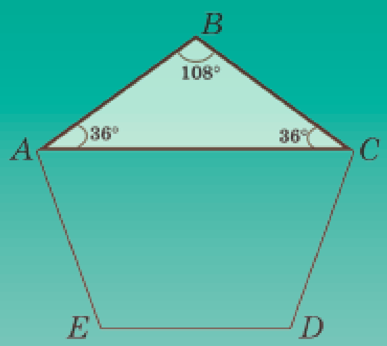


Рис. 1



Треугольники CIK и COK, BIK и BOK попарно равны по двум катетам. Тогда

$$CI = CO = BO = BI = R,$$

где R — радиус описанной окружности треугольника ABC. А треугольники BIC и BOC равны по трем сторонам.

Угол BIC равен $90° + \angle\frac{A}{2}$ — известный факт геометрии треугольника. Угол BOC (вне треугольника) равен $2A$ как центральный. Дополняющий его до 360° угол BOC (внутри треугольника) равен $360° - 2\angle A$. Поскольку

$$\angle BIC = \angle BOC,$$

то

$$90° + \angle\frac{A}{2} = 360° - 2\angle A,\ \frac{5}{2}\angle A = 270°$$

и

$$\angle A = 108°,\ \angle B = \angle C = 36°.$$

Задача 2. Найдите углы равнобедренного треугольника, в котором высота, проведенная к основанию, в два раза меньше биссектрисы угла при основании.

Решение. Пусть $AB = AC$, а высота AK (она же медиана и биссектриса) равна h. Тогда биссектриса $BL = 2h$. Проведем $KN \parallel BL$ (рис. 2).

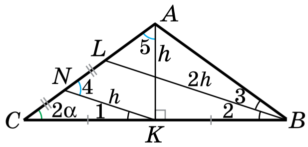


Рис. 2

Согласно теореме Фалеса, так как $BK = CK$, то $CN = NL$. Следовательно, KN — средняя линия в треугольнике BLC и

$$KN = \frac{1}{2}BL = h.$$

Значит, треугольник AKN равнобедренный ($AK = KN = h$).

Пусть

$$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \alpha.$$

Тогда

$$\angle B = \angle C = 2\alpha$$

и

$$\angle 4 = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$$

(внешний для треугольника KNC). Но

$$\angle 5 = \angle 4 = 3\alpha$$

($AK = KN$). Остается заметить, что в треугольнике AKC:

$$3\alpha + 2\alpha = 90°,$$
$$\alpha = 18°,\ 2\alpha = 36°.$$

Итак, углы треугольника ABC: 36°, 36°, 108°.

Задача 3. На стороне BC равнобедренного треугольника ABC (рис. 3) нашлась точка D такая, что

$$AD = BD,$$
$$AC = CD = AB.$$

Найдите углы треугольника ABC.

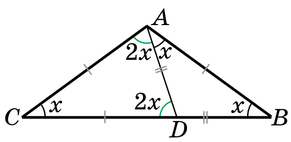


Рис. 3

Решение. Пусть

$$\angle B = \angle C = x.$$

Тогда $\angle DAB = x$ ($AD = DB$), $\angle ADC = 2x$ (внешний для треугольника ABD). Значит, и $\angle CAD = 2x$ ($AC = CD$ по условию). Для треугольника ADC получаем:

$$2x + 2x + x = 180°,\ x = 36°.$$
$$\angle B = \angle C = 36°,\ \angle A = 108°.$$

Задача 4. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) длина высоты, проведенной к основанию, равна разности радиусов описанной и вписанной окружностей этого треугольника ($AK = R - r$). Найдите углы треугольника ABC.

Решение. Продлим отрезок AK до точки O — центра описанной окружности треугольника ABC (рис. 4).

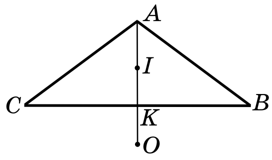


Рис. 4

Действительно,

$$AO = R,$$
$$AK = R - r.$$

Значит,

$$KO = R - (R - r) = r.$$

Но и $IK = r$ (I — центр вписанной окружности треугольника ABC). Мы пришли к задаче 1, когда точки I и O симметричны друг другу относительно BC. Значит,

$$\angle A = 108°,$$
$$\angle B = \angle C = 36°.$$

Задача 5. Вершину A треугольника ABC соединяют с точками F и N на стороне BC. Могут ли при этом все шесть образовавшихся треугольников быть равнобедренными?

Решение. Да, могут. Это реализуется в равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) с углами 108°, 36°, 36° (рис. 5).

Пусть

$$\angle CAF = \angle BAN = 36°.$$

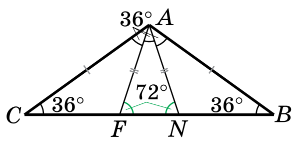


Рис. 5

Тогда треугольники CAF и BAN равнобедренные ($AF = FC$ и $AN = NB$). Треугольник FAN тоже равнобедренный:

$$\angle AFN = \angle ANF = 72°$$

и

$$AN = AF.$$

В треугольнике ACN углы CAN и CNA равны по 72° и $CA = CN$. Аналогично для треугольника ABF:

$$\angle BAF = \angle BFA = 72°$$

и

$$AB = BF.$$

Наконец, первоначальный треугольник ABC — равнобедренный с углами 108°, 36°, 36°.

Задача 6. Не пользуясь таблицами, найдите $\sin 18°$.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC с углами 108°, 36°, 36°. В нем, как было показано (задача 1) (рис. 6),

$$IK = KO = r,\ CI = CO = R.$$

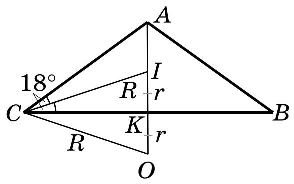


Рис. 6

Поскольку CI — биссектриса $\angle ACB$, то

$$\angle ICK = 18°,\ \sin 18° = \frac{r}{R}.$$

Согласно формуле Эйлера,

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

Для данного треугольника ABC отрезок OI равен $2r$. Значит,

$$4r^2 = R^2 - 2Rr,$$

$$4r^2 + 2Rr - R^2 = 0.$$

Разделим обе части последнего уравнения на $R^2 \neq 0$. Получаем:

$$4\frac{r^2}{R^2} + 2\frac{r}{R} - 1 = 0,$$

откуда

$$\frac{r}{R} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Отбрасываем отрицательный корень и получаем:

$$\sin 18° = \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Задачи для самостоятельного решения

7. BL — биссектриса в равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$). На основании BC взята точка D так, что DL — биссектриса угла ADC, при этом $DL \parallel AB$. Найдите углы треугольника ABC.

8. В окружность вписаны равнобедренный треугольник с основанием a и боковой стороной b и равнобедренный треугольник с основанием b и боковой стороной a. Найдите углы этих треугольников.

Ответ: 108°, 36°, 36° и 72°, 72°, 36°.

9. Дан угол 108°. Проведя не более двух линий, постройте угол, равный $\frac{1}{3}$ части данного.

Ответ: рисунок 7.

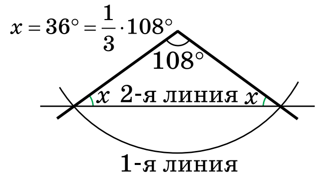


Рис. 7

10. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). Есть предположение, что $\angle BAC = 108°$. Как проверить, так ли это, пользуясь только циркулем? *Указание.* Воспользуйтесь тем, что $108° \cdot 10 = 1080° = 360° \cdot 3$.

И последнее: заметим, что треугольник ABC с углами 108°, 36°, 36° — это кусочек правильного пятиугольника $ABCDE$ (рис. 8).

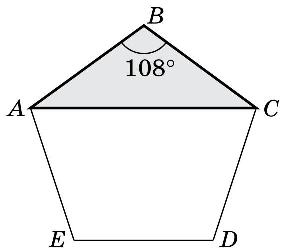


Рис. 8

Из интернета

Ученые рассказали, как работает мозг программистов

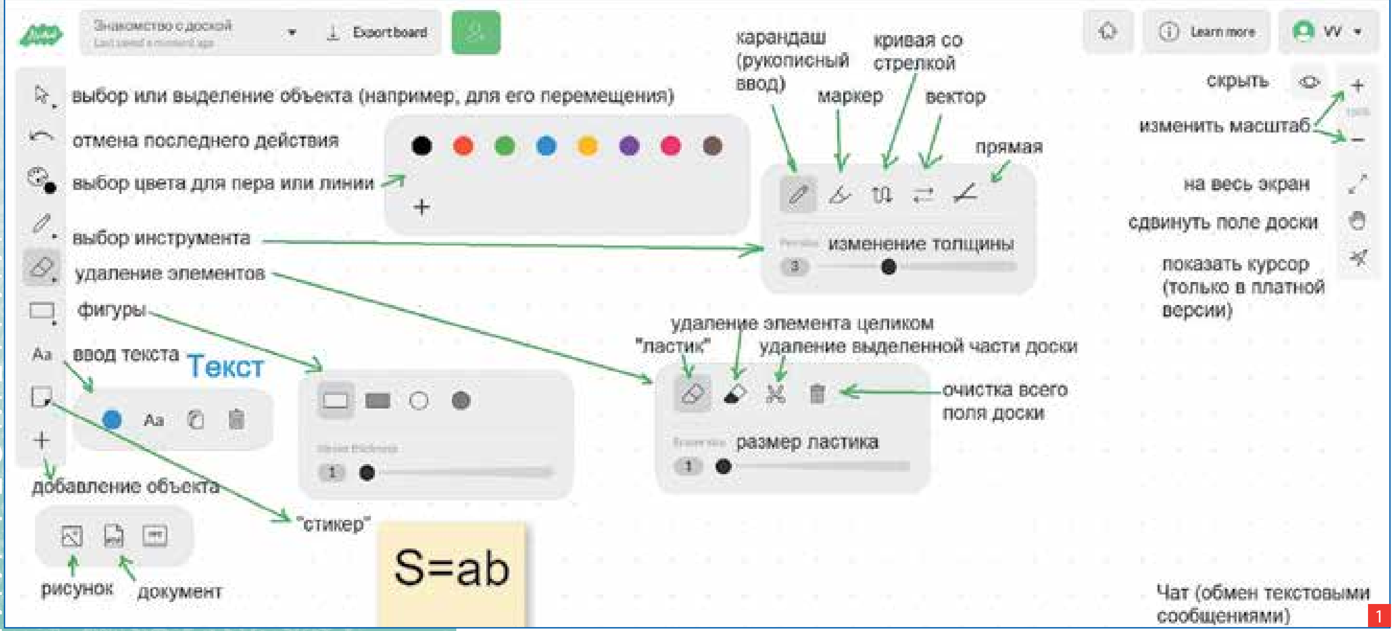
https://rusargument.ru/90031_uchenye_rasskazali_kak_rabotaet_mozg_programmistov_grozdeva

Во время нового исследования ученые применили метод вычитания, который используется в нейронауках.

Участников эксперимента специалисты поместили в аппарат МРТ, испытуемые должны были выполнить несколько заданий: добровольцам необходимо было разобраться в отрывке программного кода, а также проверить синтаксис другого отрывка.

Во время исследования эти задания повторялись несколько раз.

После окончания эксперимента ученые смогли увидеть отделы мозга, которые больше других задействованы в процессе программирования. Но особой активности, которая связана с математическим или логическим мышлением, обнаружено не было. Во время эксперимента были сделаны выводы, что для программирования важны процессы, которые связаны с пониманием речи.



В. ЛЮБИМОВА,
г. Санкт-Петербург

ВИРТУАЛЬНАЯ ДОСКА КАК ОДИН ИЗ ИНСТРУМЕНТОВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ДИСТАНЦИОННОГО УРОКА

■ При проведении дистанционных уроков по математике нередко возникает ситуация, когда объяснение трудно воспринимать на слух: громоздкие формулы, геометрические построения, графики и т.п. Хотя большинство вебинарных платформ (например, Zoom или Pruffme) имеют такой встроенный инструмент, как «Доска для совместной работы», на которой можно вставлять текст, рукописные записи, делать различные пометки и т.п., но невозможно загружать рисунки, условия задач или готовые чертежи.

Для этой цели предлагаются коммерческие решения — виртуальные доски, которые имеют более широкие возможности. Но можно найти и бесплатные ресурсы. Их достаточно много, например, awwapp.com, miro.com, www.bitpaper.io/, conceptboard.com, idroo.com и т.д.

Виртуальная доска (не путать с интерактивной!) — это инструмент технологии web2.0 для одновременной работы учителя и ученика или нескольких учеников, позволяющий объединять текст, изображения и т.п. в интерактивный формат. На этот сервис одновременно заходят учитель и ученик, каждый со своего компьютера.

Как правило, учитель создает доску перед уроком, но доску может создавать и ученик, приглашая учителя. Это удобно в случае, когда ресурс предоставляет ограниченное количество сохраненных досок.

Виртуальную доску в процессе онлайн-урока учитель может использовать, например, в режиме демонстрации своего экрана в вебинарном сервисе, или при проведении трансляции на YouTube, или при записи обучающего видеоролика, а также приглашать на нее по ссылке учеников, которые смогут выполнять какие-либо действия (делать геометрические построения, перемещать изображения, отмечать верные ответы в тесте и т.п.). Конечно, при работе с большим классом это вряд ли удобно, но для организации работы в малых группах (например, для организации обсуждения при выполнении проекта) может быть полезно. Особенно необходима виртуальная доска при индивидуальной онлайн-работе с обучающимися, имеющими ограниченные возможности здоровья.

Проведем краткий обзор наиболее популярных виртуальных досок, хотя описывать те или иные возможности интернет-сервисов — дело неблагодарное по той причине, что их создатели постоянно вносят изменения то в дизайн, то в инструменты, то делают платными функции, которые раньше были бесплатными. Поэтому заранее прошу прощения, если на практике обнаружится расхождение с изложенными в этой статье примерами. Тем не менее, познакомившись с общими принципами работы с виртуальной доской, каждый учитель сможет затем подобрать сервис по своему предпочтению. Я сама периодически перехожу с одного сервиса на другой из-за меняющегося функционала, но это все равно что один раз освоить вождение автомобиля, после этого смена модели уже не представляет затруднений.

Прежде всего заметим, что большинство виртуальных досок имеет как платные, так и бесплатные функции. В этой статье будем рассматривать только те сервисы, которые можно использовать бесплатно: для проведения обычных онлайн-уроков таких возможностей вполне достаточно.

К сожалению, полностью русскоязычного удобного сервиса на данный момент нет, все лишь англоязычные. Можно пользоваться браузерами с функцией автоматического перевода на русский язык, но лучше использовать онлайн-перевод лишь для первого знакомства с инструментами доски, так как инструменты могут работать некорректно. Например, в доске AWW при автоматическом переводе начинает дергаться строка с названием, а в MIRO не вводится текст.

Сервис AWW

https://awwapp.com

По моему субъективному мнению, для первого знакомства с виртуальной доской удобно использовать доску AWW.

Плюсы сервиса AWW:

– имеет простой, интуитивно понятный интерфейс, который можно быстро освоить;

– можно начать использовать и без регистрации, но в этом случае после завершения работы информация на доске сохранится лишь ограниченное время — не более 2 часов периода бездействия;

– при отправке ссылки на доску ученик также может использовать ее без регистрации;

– по окончании работы можно сохранить информацию в графическом файле png или в файле pdf (но pdf будет с «водяным» знаком);

– возможно использование браузера с переводом на русский язык (но иногда дергается строка с названием).

Минусы сервиса AWW:

– если в браузере нет блокировщика рекламы, то внизу будет появляться всплывающая реклама, которая мешает проведению урока (всплывающую рекламу могут блокировать и антивирусные программы, установленные на компьютере);

– нет возможности проводить пунктирные линии (выход из положения: провести линию и сделать пунктир инструментом *Ластик*);

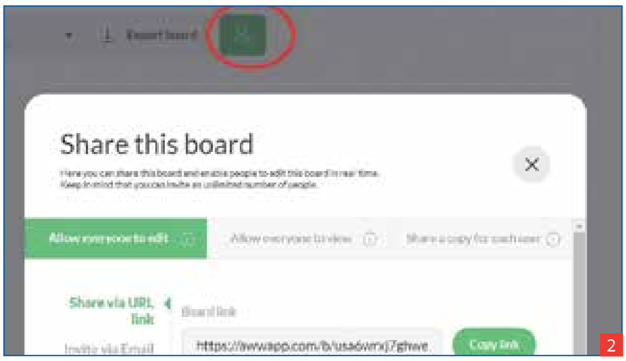
– нет возможности изменять параметры фона (нельзя не сделать «клеточки»);

– мало встроенных геометрических фигур;

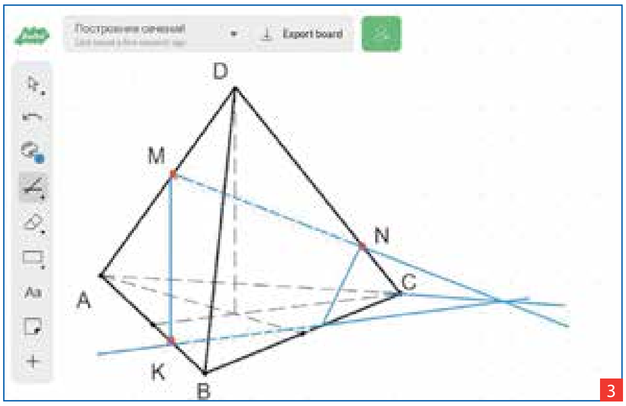
– если еще в середине апреля и в бесплатной версии можно было видеть курсор ученика, то теперь такая возможность осталась только в платной версии.

Основные инструменты виртуальной доски AWW представлены на рисунке 1, поясним, как их можно использовать во время онлайн-урока.

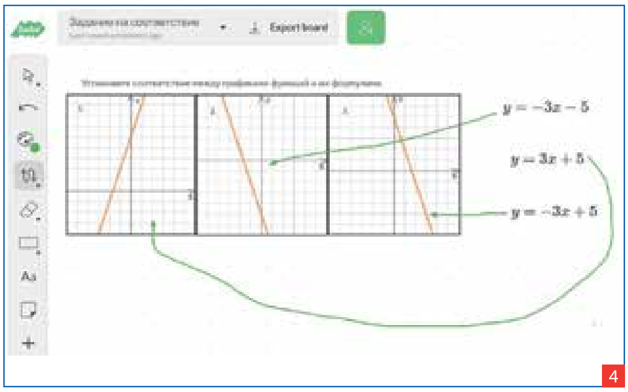
Чтобы пригласить ученика для одновременной работы на доске, достаточно нажать *Add people*, скопировать ссылку (URL-адрес) и отправить ее ученику 2. Также есть возможность сгенерировать ссылку в виде QR-кода.



2

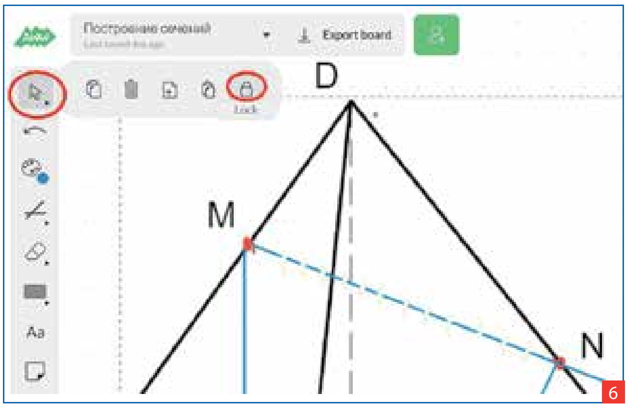


3



4

5



6

Тему урока или важные понятия можно ввести с помощью инструмента *Текст*, причем можно изменять как цвет, так и размер шрифта. С помощью инструмента *Стикер* можно акцентировать внимание на формулах или правилах, которые необходимо запомнить: при вводе текста его размер в «Стикере» регулируется автоматически.

Условия заданий необходимо подготовить заранее в виде графических файлов с расширением jpg или png, в ходе урока они загружаются на доску. Если учитель использует виртуальную доску сам, то может сопровождать объяснение рукописными комментариями на виртуальной доске. Для удобства рукописного ввода учителю желательно иметь графический планшет. Ученики могут работать и без графического планшета, но в таком случае необходимо планировать задания таким образом, чтобы ученикам не требовалось делать много записей, так как писать компьютерной мышью неудобно.

Можно предложить следующие **задания.**

1. На построение сечений 3.

2. На установление соответствий. Ученики соединяют объекты линией или составляют пары, перемещая их по полю доски 4.

3. Для устной работы. В начале работы задания и ответы можно прикрыть цветным прямоугольником и затем, перемещая его вниз, последовательно открывать задания 5.

4. Тесты с выбором ответа.

Заметим, что при совместной работе с учащимися часто бывает необходимо зафиксировать объект на доске, чтобы они его случайно не сдвинули (например, изображение многогранника, на котором строят сечение), для этого используется инструмент *Замочек* 6.

При объяснении темы «Векторы» удобно использовать инструмент *Прямые стрелки* 7. Перемещая построенный вектор (инструмент *Выбор объекта*, перемещать с нажатой левой кнопкой мыши), можно проверить, коллинеарны ли векторы.

Также удобно давать задания, где что-то надо закрасить или переставить и т.п. 8.

Если требуется прокомментировать домашнее задание, то присланный учеником графический файл или фотографию страницы тетради можно загрузить на виртуальную доску и на ней делать пометки 9.

Рабочее поле доски условно бесконечное, то есть после заполнения видимого экрана рисунками и записями можно сдвинуть исписанное поле доски вверх или влево инструментом *Ладошка*, но доска имеет пределы, да и при большом количестве информации может зависать, поэтому лучше использовать одну доску на один урок. С помощью инструмента *Export board* исписанное поле доски можно сохранить в файле, чтобы отправить ученикам в качестве образца.

После регистрации аккаунта (то есть «личного кабинета» через электронную почту) в бесплатной версии появится возможность сохранить три доски. Сохраняется именно URL-ссылка, информацию на доске можно при желании удалить. На сохраненной доске есть возможность создать новые страницы (по той же ссылке), загрузить файл в формате pdf или презентацию. Остальные инструменты аккаунта см. на рисунке 10.

Перечисленные выше возможности есть и в других виртуальных досках, хотя могут быть небольшие отличия в оформлении и местоположении пиктограмм, повторно их рассматривать не будем, остановимся лишь на дополнительных возможностях, удобных для учителя математики.

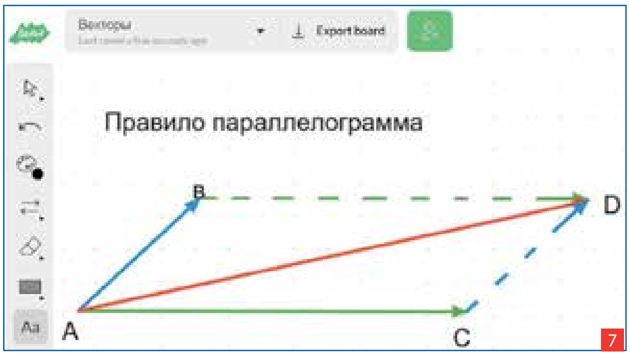
Сервис Bitpaper

https://www.bitpaper.io

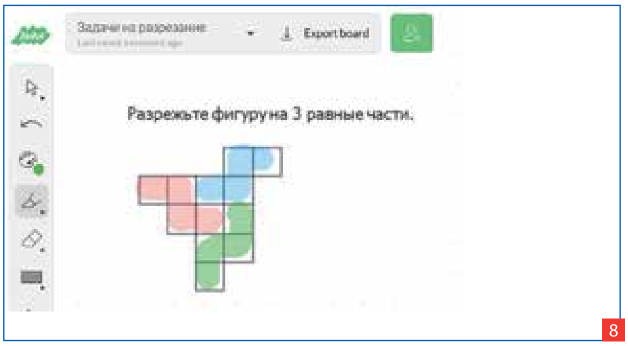
Bitpaper в бесплатном плане после регистрации аккаунта (через электронную почту или имеющийся Google-аккаунт) позволяет создавать и сохранять лишь одну рабочую доску в месяц, но информацию на ней можно менять, очищать доску и использовать снова сколь угодно часто.

Плюсы сервиса Bitpaper:

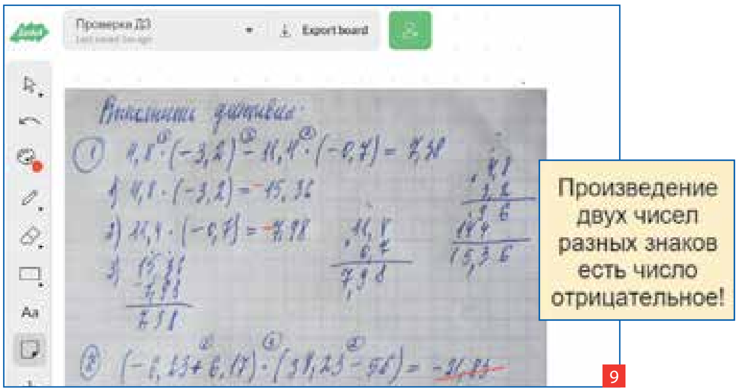
– ученики могут заходить на созданную учителем доску без регистрации, по присланной ссылке, видят курсор учителя, учитель видит курсор ученика (отличаются цветом, без указания имени);



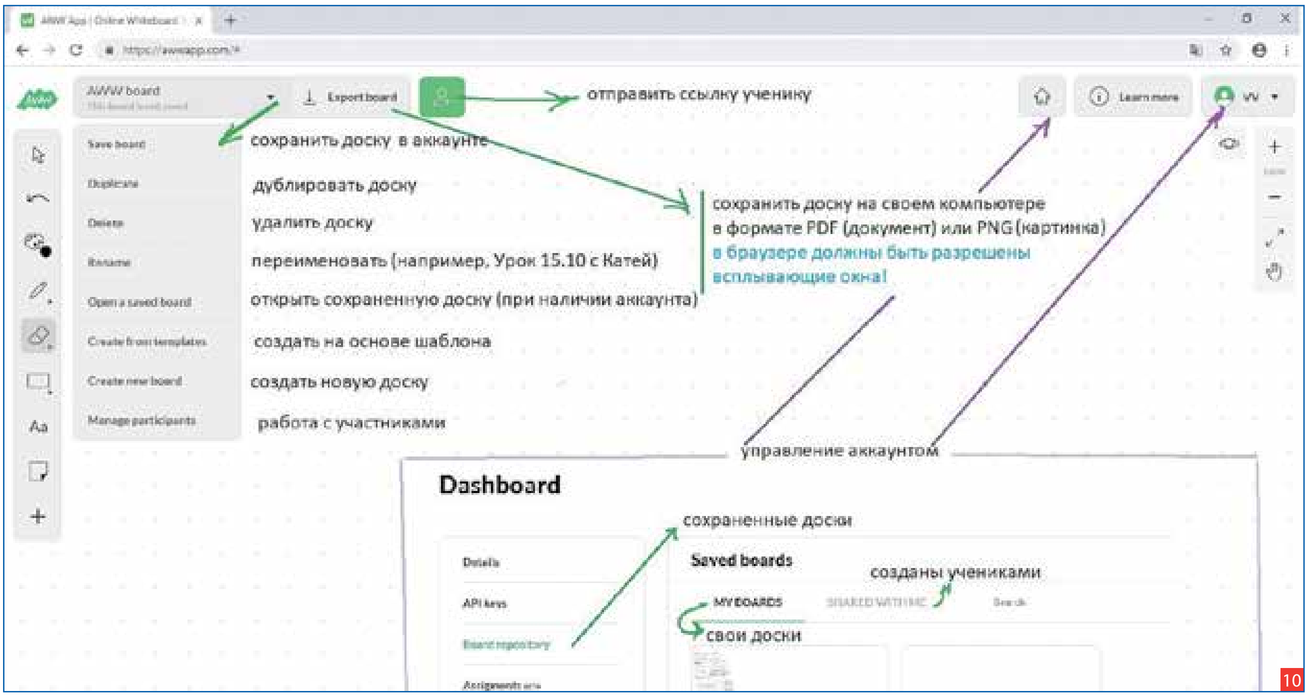
7



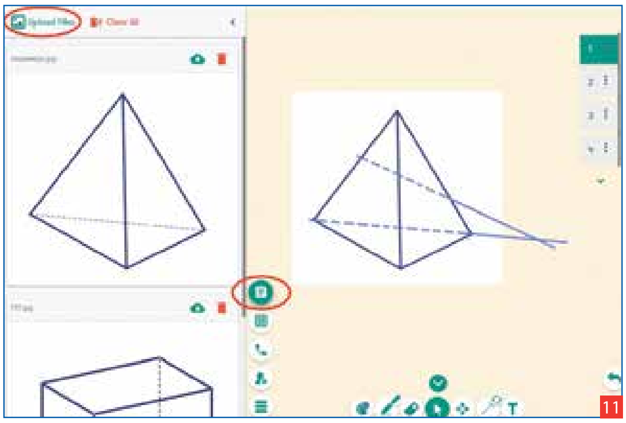
8

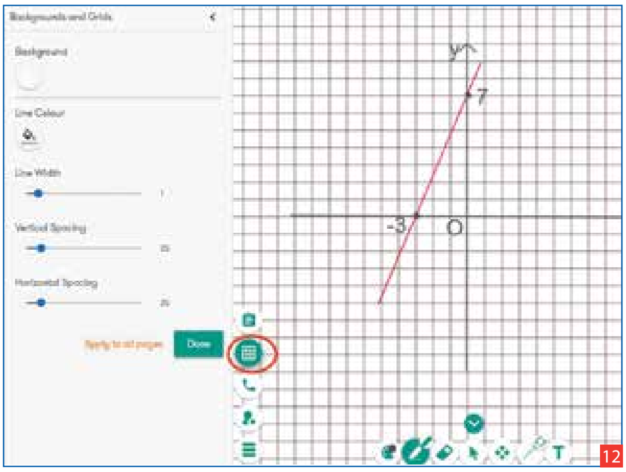


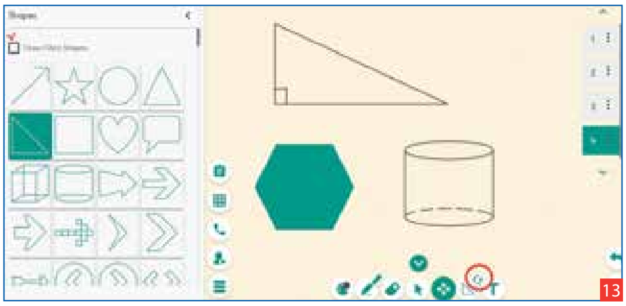
9

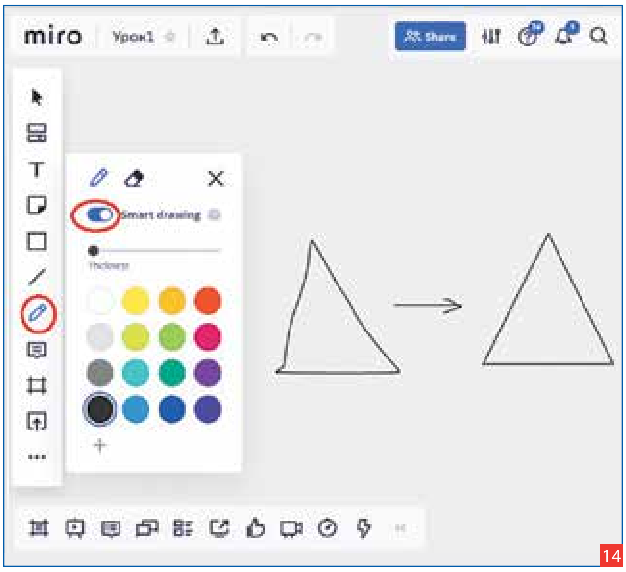


10









– при вводе текста можно вводить греческие буквы и другие символы;

– сохранять загруженные изображения, даже если они удалены с поля доски. Это удобно, например, для хранения стереометрических чертежей 11;

– изменять цвет фона поля доски и добавлять клетчатый фон. Это удобно тем, что не надо загружать изображение координатной плоскости в виде файла 12;

– загружать файл pdf; каждая страница документа будет показана на отдельной странице виртуальной доски. На рисунке 12 страницы доски можно увидеть справа: от 1 до 4;

– есть большое количество встроенных фигур 13; чтобы фигура была закрашенная, надо поставить галочку вверху слева.

Минусы сервиса Bitpaper:

– при сохранении в файл pdf сохраняется лишь видимое поле доски, но зато все созданные страницы, поэтому можно оформлять решение каждой задачи на отдельной странице;

– возможность видеозвонка (замена скайпа) сейчас лишь в платной версии.

Сервис MIRO

https://miro.com

Еще больше возможностей предоставляет сервис MIRO. В бесплатном аккаунте можно сохранить до трех созданных досок, но если требуется больше, то можно попросить ученика создать доску и прислать ссылку учителю. В результате получаем так называемую команду, количество членов которой пока не ограничено.

Плюсы сервиса MIRO:

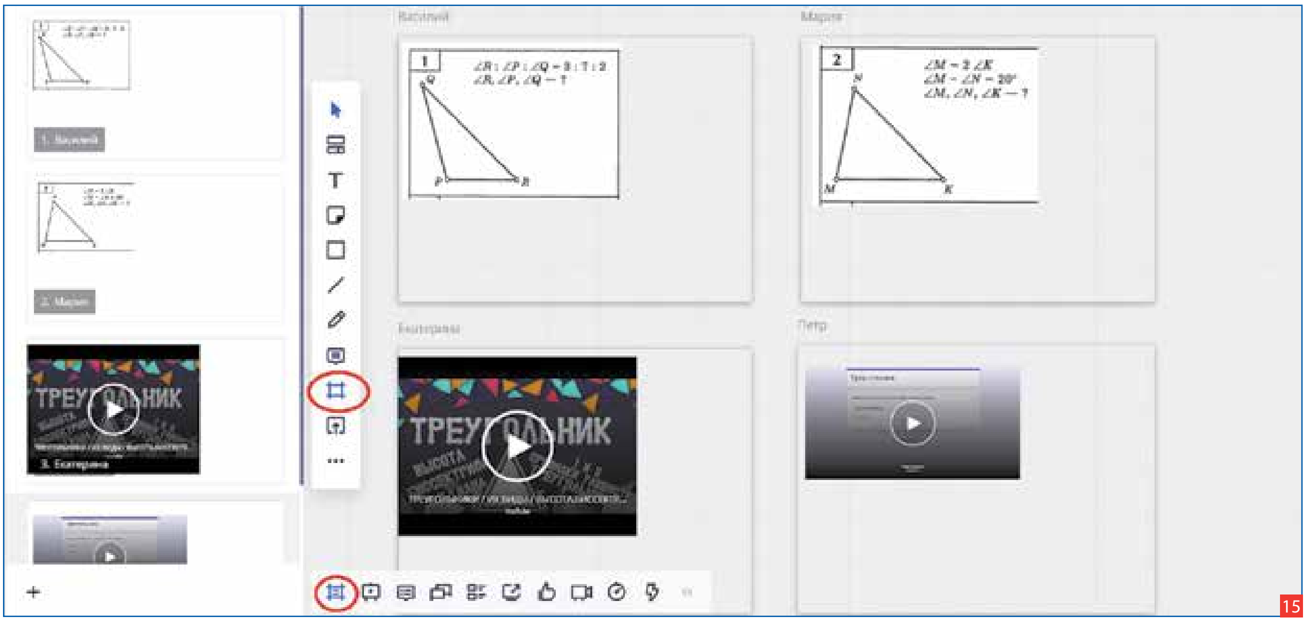
– возможность проводить прямые линии пунктиром;

– «умное рисование», когда нарисованные от руки фигуры автоматически превращаются в геометрические 14. Таким образом можно строить равнобедренный треугольник, окружность, ромб, параллелограмм, прямоугольник, квадрат, равнобедренную трапецию, правильный пятиугольник, шестиугольник, но разносторонний прямоугольный треугольник построить не получится, он превратится в равнобедренный;

– загруженные на доску изображения ученики могут скачать на свой компьютер, щелкнув правой кнопкой мыши по рисунку и выбрав в меню соответствующий пункт;

– к загруженным изображениям учитель может добавлять ссылку на сайт в сети интернет;

– для организации рабочего пространства доски при совместной работе с несколькими учениками удобно использовать инструмент *Рам-*


15

ка, который позволяет создать рабочие области с именами учеников. 15 На них можно загрузить условия задач и затем наблюдать за ходом выполнения, переключаясь между рамками с помощью панели слева (открыть ее можно по пиктограмме в левом нижнем углу);

– на поле доски можно встраивать видеоуроки с YouTube, ссылки на тесты в GoogleФормах, игры на платформе LearningApps и т.п. с помощью embed-кода. На рисунке 15 показаны примеры вставки в нижних рамках, на рисунке 16 — как вставлять. Однако хода выполнения игры учеником учитель не увидит.

Заметим, что рамки, как и изображения, можно защитить от случайного перемещения с помощью инструмента *Замок*. Для этого нужно щелкнуть левой кнопкой по пиктограмме *Замок* или правой кнопкой мыши кликнуть по названию рамки и выбрать *Lock*.

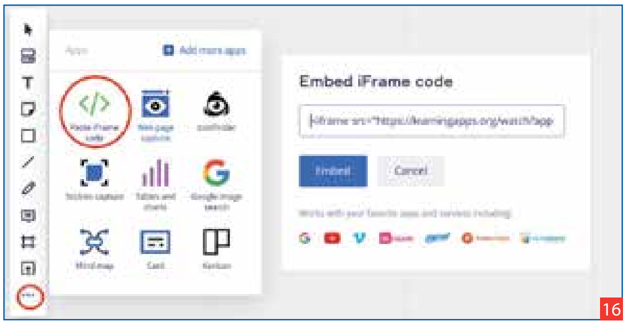
При сохранении доски в файле с расширением pdf каждая рамка сохраняется на отдельной странице документа.

Минусы сервиса MIRO:

– чтобы ученик мог начать работу на доске по присланной учителем ссылке, ему необходима регистрация в сервисе через аккаунт в Google, только тогда учителю будет виден курсор ученика с его именем;

– хотя этот сервис создавался разработчиками из Перми, но поддержки русского языка до сих пор нет, а при использовании автоматического перевода в браузере возможна некорректная работа инструментов;

– при построении сечений на загруженном изображении нередко происходит «прилипание» прямых к угловым маркерам рисунка, что очень мешает работе;



16

– в бесплатной версии при сохранении большого количества рисунков и записей в файл изображение может получиться низкого качества, поэтому иногда приходится сохранять доску отдельными частями.

Таким образом, практически все виртуальные доски имеют свои достоинства и недостатки, каждый учитель может выбрать сервис по своему усмотрению. В этой статье не ставилась цель рассмотреть абсолютно все функции упомянутых сервисов — их довольно много. В обзоре показаны лишь основные инструменты, которые могут пригодиться в дистанционной работе учителю.

Видео по работе с упомянутыми сервисами

1. Работа с виртуальной доской AWW: https://youtu.be/5k5ziq8_2XQ

2. Работа с виртуальной доской Bitpaper: https://youtu.be/bDJcVodj45o

3. Работа с виртуальной доской MIRO: https://youtu.be/WQ7P1OQVVMg

Беседа по мотивам вебинара, проведенного Издательством «Просвещение» 2 июня 2020 г. — Режим доступа: events.webinar.ru/12290983/5090633.

В статье использованы фрагменты презентаций Л.О. Рословой и Е.П. Загрядской

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ГРАМОТНОСТЬ: РАЗГОВОР ЭКСПЕРТОВ

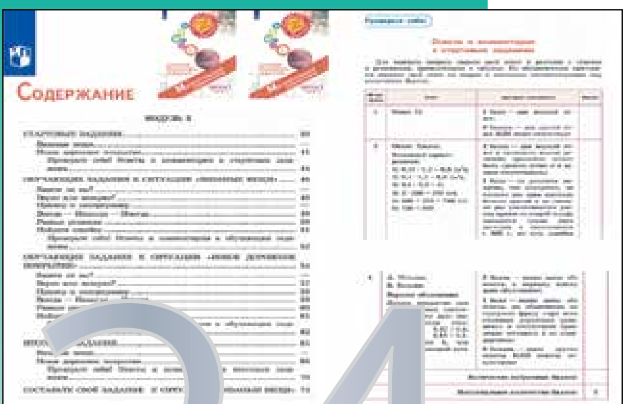
Участники беседы

Лариса Олеговна РОСЛОВА, главный редактор журнала «Математика», заведующий лабораторией математического общего образования и информатизации Института стратегии развития образования Российской академии образования;

Елена Павловна ЗАГРЯДСКАЯ, учитель математики средней общеобразовательной школы № 16 г. Клина, Московская область.

Ведет беседу

Юлия Симоновна ЗАХИР, руководитель проектов издательства «Просвещение».



Лариса Олеговна, я знаю, что не так давно Ваша команда проводила опрос учителей математики об их готовности к формированию функциональной математической грамотности школьников. Могли бы Вы сказать несколько слов о результатах опроса?

Л.Р. Да, читатели журнала знают, что мы провели такой экспресс-опрос в ноябре прошлого года на сайте Российской ассоциации учителей математики. Нашими респондентами стали 182 учителя математики, преподающих в 5–11-х классах общеобразовательных организаций, из 17 субъектов Российской Федерации. Результаты ответов на вопрос «Из чего, на ваш взгляд, складывается готовность учителя к формированию математической грамотности учащихся?» свидетельствуют о том, что в первую очередь для учителя важно овладение методикой формирования математической грамотности; этот ответ выбрали почти 90% отвечавших. На втором месте учителя указали обеспеченность учебными материалами и средствами обучения — это сделали более 80%; далее следуют «понимание актуальности и значимости данной педагогической задачи» (указали в своих ответах три четверти учителей) и «наличие критериев оценки и контрольно-оценочных материалов» (две трети отвечавших на наши вопросы).

Организуя опрос, мы хотели определить основные дефициты учителя математики. Но оказалось, что на сегодня основных нет — все в дефиците: учебные материалы, методики, средства контроля. Прежде всего почти ничего нет в учебниках, которыми пользуются участники опроса. Треть не имеют никаких собственных разработок. Около 5% используют в качестве вспомогательных материалов задачи из открытых банков заданий ФИПИ и сборников для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ. Приблизительно столько же имеют материалы для обучения применению знаний по геометрии на местности. Ситуация, что называется, «поскрести по сусекам». Многие используют задачи, основанные на личном жизненном опыте, такие как: расчет стоимости ремонта, семейного бюджета, вычисление длины маршрута и т.п., при этом некоторые преподаватели просят учеников самостоятельно составлять математические задачи, опираясь на жизненные ситуации и собственный опыт.

Лариса Олеговна, сегодняшний разговор о математической грамотности хотелось посвятить эффективным методикам преподавания и формам работы учителя на уроках математики, которые уже есть в арсенале учителей. Какие из них действительно способствуют развитию математической грамотности школьников?

Л.Р. Что касается форм работы, то тут не удалось выявить каких-либо предпочтений. Похоже, что не содержание обучения будет определять формы, а наоборот — задания будут встраиваться учителем в традиционный для него учебный процесс.

Что касается методики, то один из респондентов сформулировал девиз следующим образом: «Решать! Решать! Решать!» С этим нельзя не согласиться, если речь идет о том, что такие задачи обязательно должны быть в учебном процессе, и нельзя согласиться, если речь идет о натаскивании, о разучивании как можно большего количества сюжетов. Я хочу подчеркнуть, что применение знаний — это интеллектуальный процесс, комплексный, включающий в себя в том числе социальный опыт ученика. Поэтому натаскивание здесь просто бессмысленно!

Важно, что абсолютно все участники опроса высказались за то, что функциональная грамотность сегодня — чрезвычайно важное направление работы учителя, и выразили свою готовность и заинтересованность решать эту задачу.

Правильно ли я понимаю, что задача, которую Вы с коллегами решали, создавая пособия серии «Математическая грамотность. Учимся для жизни», и состояла в том, чтобы дать учителям примеры применения математических знаний в жизни?

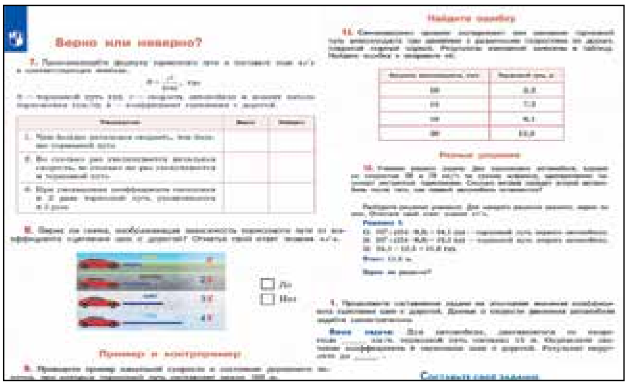
Л.Р. Верно, но не единственная. Мне кажется, что нам удалось предложить учителям также и определенные методические решения.

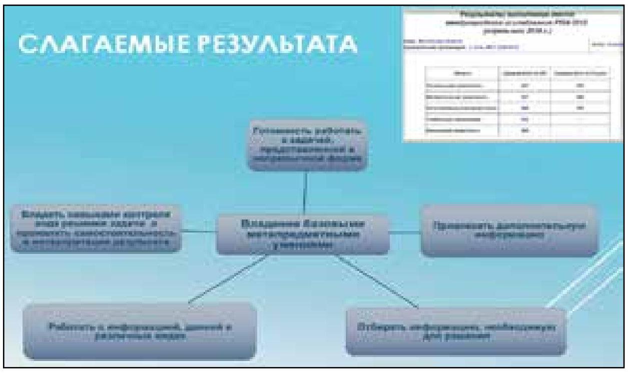
Во-первых, хотелось бы сказать, что для обучения важно не количество разобранных ситуаций и сюжетов. Гораздо важнее и полезнее — длительное проживание с сюжетом: разобрать его с разных сторон, сформулировать вопросы, обсудить непонятное, рассмотреть разные возможные решения, оценить эти решения и интерпретировать полученные результаты, изменить исходные данные и посмотреть, как это отразится на результате, придумать свою задачу по аналогии. Это и обучает видению математики в реальной жизни. А именно это является ключевым в формировании функциональной математической грамотности: научить видеть математику в ситуациях реальной жизни и формулировать соответствующие задачи на математическом языке. К сожалению, делать это не умеют многие взрослые. Зачем готовить по рецепту, высчитывая все в граммах, если можно сыпать «на глаз»? Поэтому ситуаций в пособии мы даем не так много, но даем много заданий к одной и той же ситуации.

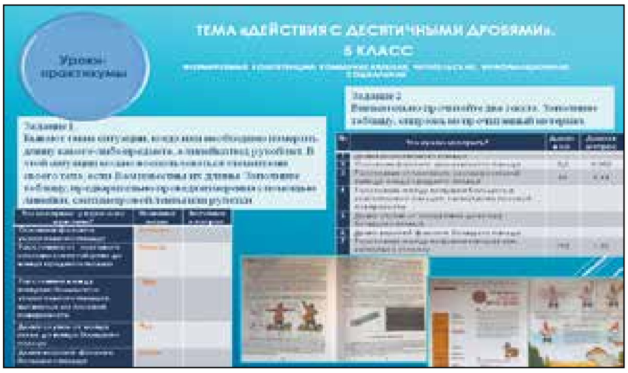
Второй важный момент — развитие самостоятельности. В реальной жизни человек либо принимает задачу, либо не принимает ее: он ее или не видит, или ищет другие пути выхода из ситуации, но не применение школьных математических знаний. Зачем что-то считать самому, если можно «спросить» интернет или консультанта в магазине, банке и т.п.? Это своего рода обученная беспомощность. Дети привыкли списывать домашние задания. В пособии мы даем ответы и решения, снабжаем задания критериями оценивания. Списывать смысла нет, но можно попробовать разобраться самостоятельно и оценить результат.

В-третьих, хотелось бы обратить внимание учителя на возможные трудности детей, недостатки в их подготовке. Например, недостаток предметных навыков. Но это-то проверяется различными формами контроля. А вот умение прочесть текст, описывающий ситуацию, вычленить информацию из такого структурированного формата его представления, как таблица, разобрать графические и символьные элементы текста, выбрать данные, необходимые для разрешения ситуации, сопоставить вербальную информацию и графическую? Или умение работать с утверждениями: грамотно их строить, приводить примеры и контрпримеры, отличать общее утверждение от частного? Это все из разряда метапредметных результатов, формируемых в том числе при обучении математике, они важны для анализа реальных ситуаций.

В-четвертых, ученик может отследить свой прогресс. Например, выполняя стартовые задания, он получил четыре балла, прорешал обучающие задания, понял свои ошибки — и смог выполнить итоговые задания на семь баллов. Это элемент осознанности обучения, самоконтро-







ля. Многие дети хотят быть успешнее в математике и стремятся к этому, они готовы работать.

Елена Павловна, накануне нового учебного года хотелось бы попросить Вас поделиться с коллегами своим опытом. Удалось ли вам познакомиться и спланировать работу с пособием? На какие основные моменты Вы бы порекомендовали коллегам обратить внимание?

Е.З. Да, мы начали такую работу. На плановом заседании школьного методического объединения в апреле поставили задачу: проанализировать задания для формирования математической грамотности, которые каждый учитель планирует использовать на уроках и во внеурочной деятельности, подобрать хорошие пособия для работы.

Одним из таких пособий, на наш взгляд, и является «Математическая грамотность. Учимся для жизни». Важно то, что содержание пособия построено на основных программных требованиях к математической подготовке учащихся 5-х классов (часть 1) и 6–7-х классов (часть 2). «Стартовые задания» и «Обучающие задания» можно предлагать и на этапе устной работы (в зависимости от подготовки класса). Сюжеты заданий могут стать идеями для создания различных проектов, причем как групповых, так и индивидуальных. Поскольку к заданиям приводятся ответы и комментарии, а также критерии оценивания, школьник сможет самостоятельно проверить свой результат. Задания пособия можно предлагать и в качестве домашнего задания, и для индивидуальной самостоятельной работы.

Елена Павловна, знаю, что у Вас уже есть положительный опыт формирования математической грамотности. Нам бы хотелось, чтобы Вы поделились им с читателями журнала.

Е.З. Уважаемые коллеги, я представлю свой опыт и опыт моих коллег по использованию активных форм обучения для формирования математической грамотности на уроках математики и во внеурочное время.

В 2018 году девятиклассники нашей школы приняли участие в международном исследовании PISA. Наш опыт участия оказался успешным. Учащиеся показали достаточно высокий уровень компетенций по трем направлениям исследования, в том числе и по математической грамотности. Как мы этого достигли? Попробую ответить на этот вопрос. Давайте внимательно рассмотрим те базовые метапредметные умения, которыми должен владеть 15-летний учащийся.

Это готовность работать с задачей, представленной в непривычной форме, использовать различные методы решения. Уметь отбирать информацию, необходимую для решения, особенно в ситуации наличия избыточной информации; привлекать дополнительную информацию; работать с информацией, данной в различных видах, — текстом, таблицей, диаграммой, рисунком, чертежом. Учитывать все данные и условия в процессе решения; владеть навыками контроля хода решения и проявлять самостоятельность в интерпретации результата.

По результатам исследования PISA стало понятно, что нашим учащимся как раз и не хватает этих умений, значит, при организации процесса обучения их необходимо сформировать и развивать. Как организовать процесс обучения? Я остановлюсь на формах организации обучения, которые используем я и мои коллеги.

Начиная с 5-го класса, мы проводим уроки-практикумы и уроки «реальной математики», предлагаем выполнить творческие домашние задания, вовлекаем ребят в олимпиадное движение, конкурсы, конференции, широко используем проектную деятельность.

Хочу показать примеры реализации каждой формы.

На уроках-практикумах я предлагаю задачи, составленные на основе практической ситуации, с реальными числовыми данными, с представлением информации в различной форме. Давайте посмотрим на задачу по теме «Среднее арифметическое».

Решая такую задачу, пятиклассники проводят вычисления, включая округление; учатся извлекать и интерпретировать информацию, представленную в таблицах; изображают полученные результаты в виде диаграммы. У них формируется умение видеть математическую задачу в контексте проблемной ситуации, в окружающей жизни.

Еще одна «живая задача». В таблице 7 позиций — 7 измерений — характер дробей. Здесь ребята проводят измерения с помощью инструментов, выполняют деление при переводе одних единиц измерения в другие. Фрагменты текстов для работы — из учебника и из журнала «Квантик». Учащиеся критически оценивают полученный ответ, анализируют и извлекают информацию из текста, организуют информацию в виде таблицы.

Проведение уроков-практикумов в любом классе требует большой подготовительной работы. Помимо учебных, текстовых задач, можно включать задания, ориентированные на задания PISA. В поисках нужной задачи приходится работать с различными интернет-ресурсами, дополнительной литературой. На слайде фрагмент из пособия, о котором мы уже говорили. Такое задание можно предложить и на уроке или в качестве домашнего задания.

Еще предлагаю выполнить творческие домашние задания. Задания на стыке математики, литературы, истории. При выполнении таких заданий активизируется креативность, развиваются познавательные процессы, память, сообразительность. Комикс — это рисованная история, рассказ в картинках, своеобразный способ передачи информации. Комикс можно использовать и как средство мотивации в обучении, и как инструмент развития творче-

ских способностей ученика. При создании комикса школьник повторяет алгоритм решения задачи и создает ассоциацию к нему, а значит, лучше усваивает информацию.

Проектная деятельность вызывает особый интерес у учащихся уже с 5-го класса. Начинаем мы с мини-проектов. Берем такую тему: «Геометрия вокруг нас», где объектом исследования являются окружающие нас предметы. При работе над проектом «Задача о моем питомце» дети опирались на свой опыт, что очень важно с точки зрения формирования математической грамотности. Это были задачи и о рационе питания питомца, и об уходе за ним, и о лечении. Ребенок так развернул условие, что написал, кто такой ветеринар, представил в таблице адреса ветеринарных клиник нашего города.

Ребята работают над проектами как индивидуально, так и в группах. Есть опыт работы над коллективным проектом по теме «Математический поезд»; работу выполняли десятиклассники, разрабатывая игру для ребят из 5-х классов. Создавались и индивидуальные интегрированные, долгосрочные, проекты — «Математика и музыка», «Золотой треугольник». Работа над проектами развивает исследовательские и творческие способности, создает условия для самостоятельной деятельности учащихся. Метод проектов нашел широкое применение главным образом потому, что он позволяет органично интегрировать знания учащихся из разных областей при решении одной проблемы, дает возможность применить полученные знания на практике.

Вовлекаю ребят и в олимпиадное движение. Конечно, основной целью олимпиады является выявление одаренных, нестандартно мыслящих учащихся. Я считаю, что это нестандартное мышление у школьников необходимо развивать, даже, можно сказать, воспитывать. И тогда обычный школьник, не обладающий сверхспособностями, может добиваться успехов на олимпиадах определенного уровня. Это и предметные и метапредметные олимпиады для 5-го класса, и серьезные олимпиады: Физтех, Ломоносовский турнир, олимпиада Эйлера, Всероссийская олимпиада школьников. Гибкость ума — главное, что развивается у ребенка. Около 8% учащихся России достигают высокого уровня математической грамотности, то есть проявляют способность дать математическую интерпретацию относительно непростой незнакомой ситуации. Они проводят достаточно сложные рассуждения и выходят на решение проблемы. Мое предположение, что все-таки такая работа с учащимися — это важный шаг на пути формирования математической грамотности. Хочется узнать Ваше мнение, Лариса Олеговна, по этому вопросу.

Л.Р. Хочу Вас поддержать. Математические олимпиады — это хороший опыт не только для тех, кто станет математиком. Красивые математические задачи, соприкосновение с нестандартным, удовольствие от решения сложной задачи, преодоление себя — это остается с человеком на всю жизнь. И, конечно, это развивает интеллект. Если человек умеет и не боится думать, ему легче справляться с задачами из реальной жизни.

Я уже говорила сегодня, что применение знаний — процесс интеллектуальный, а значит, чтобы применить любое знание, нужно уметь мыслить, рассуждать. Именно поэтому мы и предлагаем в пособии обучающие задания, связанные с развитием логики: определи, верно или неверно утверждение; распознай, общее это утверждение или частное. Еще важно разбирать разные решения; это все равно что встать на позицию другого человека, взглянуть с другой стороны. Это формирует гибкость мышления. Важно уметь находить ошибки — в своих решениях и в чужих. Всему этому учат олимпиадные математические задачи, учат на нестандартном для школьной программы материале. Но это важно для всех. Думать должен уметь каждый! И учить этому можно всех, а материал — задачи из реальной жизни, где можно применить обычные программные знания. Здесь ведь тоже есть нестандартность: жизнь постоянно дает разные задачи, не повторяющиеся. Элемент нестандартности остается, а новые или более сложные математические знания не нужны, поэтому и важно использовать эти задания на уроках. Потому что это нужно всем и каждому.

Е.З. Спасибо большое за поддержку. Хочу еще показать материалы моих коллег.

Урок реальной математики в 9-м классе учителя математики О.П. Садовниковой. Она предложила ребятам деловую игру «Математика для жизни», ее цель — познакомить учащихся с практическим применением математических знаний в профессиональной деятельности, отработать практические умения и навыки применения математических знаний при решении задач. Деловая игра — это модель процесса принятия решения в реальной ситуации. Она позволяет создавать ситуации, в которых играющему необходимо найти правильную линию поведения, оптимальное решение проблемы. В ходе игры каждому участнику предстоит максимально мобилизовать все свои знания, опыт, воображение. Особенно ценно то, что дело не сводится к механическому использованию программного материала. В процессе игры вырабатывается умение мыслить системно, продуктивно, пробуждается стремление к поиску новых идей, повышается мотивация к обучению.

И еще урок-практикум для учащихся 8-х классов, который проводила учитель М.А. Хмельницкая. Тема урока: «Численная характеристика двумерной геометрической фигуры в квадратных единицах». Организационные формы работы на уроке: индивидуальная, фронтальная, групповая (парная), коллективная. Деятельностная цель: формирование у учащихся способностей к рефлексии коррекционно-контрольного типа и реализации коррекционной нормы (фиксирование собственных затруднений в деятельности, выявление их причин, построение и реализация проекта выхода из затруднения и т.д.). Образовательная цель: коррекция и тренинг изученных понятий, алгоритмов. Здесь на практико-ориентированной задаче отрабатывается применение изученных формул и свойств фигур.

Мы будем очень рады, если наши материалы окажутся для Вас полезными.

Л.Р. Елена Павловна, Вы показали очень интересные и разносторонние примеры работы, направленной на формирование математической грамотности, у меня в этой связи два вопроса.

Взаимодействуете ли Вы с преподавателями других предметов? Например, выполняя работу, связанную со спортивными результатами, — с учителями физкультуры, связанную с упоминанием в литературе старинных мер — с учителями-филологами, с измерением масс — с учителями физики? Был ли у Вас такой опыт? Мне кажется, что результат будет ощутимее, если проблема изучается не только с точки зрения математики, но и другого «заинтересованного» предмета. Как Вы считаете?

Е.З. Да, взаимодействие есть. В этом году с учителем истории мы провели интегрированный урок в 7-м классе, направленный на развитие межпредметных связей и метапредметных результатов. Если рассматривать мой пример из презентации относительно старинных мер длины, то учащиеся на уроке узнали лексические значения устаревших слов. На уроке литературы они встречаются с такими словами в произведениях и уже понимают смысл. На уроках истории есть такой вид работы, как работа с историческим документом, где также дети уже осмысленно работают с текстом. Учитель русского языка проводил небольшой диктант в продолжение темы: названия единиц длины, связанных с метром, с использованием приставок деци-, санти-, мили-.

Л.Р. И второй вопрос — относительно роли методического объединения учителей математики. Важно ли здесь работать командой? Или в этом нет необходимости?

Е.З. Методическое объединение — это профессиональное сообщество. В составе нашего школьного математического объединения учителей физики, математики, информатики всего пять человек, а в районном математическом объединении работает около 80 человек. Для всех наших заседаний характерна практическая направленность: учителя обмениваются опытом работы по разным вопросам. Важно ли работать командой? Безусловно. Это и обсуждение различных точек зрения, выбор именно той золотой середины, которая приведет к наилучшему результату.

Что касается использования единого подхода и материалов для контроля. У нас был такой опыт работы. Более пяти лет использовалась система районных мониторингов по геометрии для 7–9-х классов. Разрабатывались единые тексты заданий, анализировались результаты, сравнивались с результатами ОГЭ, делались выводы. Сейчас работаем с результатами ВПР и РДР. Перед учителями математики школьного математического объединения стоит задача подготовить программы курсов внеурочной деятельности, направленных на формирование функциональной грамотности. В том числе и математической.

Л.Р. А что с точки зрения методики обучения Вас волнует в контексте функциональной математической грамотности?

Е.З. Такое важное средство обучения, как текстовая задача. На решение текстовых задач мы отводим практически половину учебного времени. Как развернуть стандартную текстовую задачу из учебника математики в сторону задания, ориентированного на формат PISA. Можно ли показать, как это сделать, на конкретном примере? Рассмотрим, например, традиционную задачу на движение вдогонку:

Из одного пункта в одном направлении одновременно вышли два пешехода, один идет со скоростью 5 км/ч, а второй со скоростью 7 км/ч. Какое расстояние будет между ними через четыре часа после начала движения?

Л.Р. Текстовая задача — это дидактическое средство, направленное на освоение некоторой математической модели. Текстовая задача математически корректно сформулирована: поставлен вопрос, нет лишних данных. Мы хотим, чтобы ученик овладел методом ее решения. Это важный элемент содержания школьного математического образования. И Вы здесь совершенно правы: разобрав с учениками текстовую задачу, можно предложить контекстную, которая сведется к этой изучаемой модели.

Что отличает контекстную задачу (реальную ситуацию) от текстовой задачи? Неопределенность, различные способы представления информации, избыточность информации, данные и величины в привычной для жизни записи, реальные данные, приводящие к «некрасивым», неудобным вычислениям, вычислениям с округлениями и приближениями.

Как нашу текстовую задачу на движение превратить в контекстную? Давайте попробуем. Во-первых, нужен понятный реальный сюжет: кто и зачем вышел, куда идет, догоняет или отстает. У меня родился сюжет про «догонялки», но немного другой:

Одну из сестер послали пешком навестить бабушку и отнести ей пирожки, но уже после того как она вышла из дома, бабушка позвонила и попросила принести ей лекарство. Вдогонку первой девочке послали на велосипеде ее сестру. Вторая девочка должна догнать первую, передать лекарство и вернуться домой не позднее определенного времени, потому что у нее начинаются занятия. Успеет ли она это сделать?

Вот такая сказка про Красную Шапочку, правда, без волка. Добавим к сюжету реальные данные в традиционной форме. Можно задать скорости, их диапазон, вообще говоря, известен: 5 км/ч — пешеход, 12 км/ч — велосипедист. Надо задать время: например, первая девочка вышла в 15 часов, вторая девочка выехала в 15.15 и должна вернуться к 15.45. Можно добавить лишние данные. Например, что до бабушкиного дома первая девочка доходит за 30 минут или что расстояние до него составляет 2,5 км.

Неоднозначность ситуации в том, что первая девочка может уже дойти до дома бабушки, прежде чем вторая ее догонит.

Можно задать не скорости, а время, за которое одна доходит, а другая доезжает. Можно заменить бабушку и лекарство на электричку, которая отходит в определенное время, и забытый телефон. Это трансформации сюжета, которые можно разрабатывать в дальнейшем, в том числе просить детей придумать свою задачу со своим сюжетом. Когда они начнут выбирать данные для своей задачи, они будут думать об их реалистичности, узнавать где-то скорости движения пешехода и велосипедиста, переводить единицы и совершать прочие полезные действия.

Е.З. Спасибо. Обязательно поговорим с коллегами об этом на ближайшем заседании ШМО.

Лариса Олеговна, не скрою, всегда есть искушение проверить усвоение содержания предмета, включить PISA-ориентированные задания в контрольные работы. Насколько это целесообразно?

Л.Р. Мне кажется, что здесь нет единого ответа. Все зависит от того, как учитель захочет выстроить всю систему работы по формированию математической грамотности. Можно ведь и отдельный формат для контроля результата, полученного за год, придумать. Наверное, так лучше, ведь мы имеем дело с метапредметным результатом, а его формирование — процесс длительный. Да и формат таких заданий специфичен, они содержат тексты, графики, поэтому могут и времени много для выполнения потребовать, что вряд ли впишется в формат обычной тематической контрольной работы.

Но если это небольшие по объему задачи с практическим содержанием, вроде тех, что были в ОГЭ в модуле «Реальная математика», то они вполне впишутся и в обычную контрольную работу. Можно сочетать разные подходы.

Коллеги, представим себе первое родительское собрание в сентябре 2020 года. Можете ли вы дать совет коллегам, как ответить на вопрос родителей: «Зачем это нужно нашим детям?»

Л.Р. Если выбрать что-то одно, то я бы сказала, что ради мотивирования детей к освоению математики. Чтобы им было понятно, зачем их дети учат математику. В опросе, о котором я говорила в начале нашей беседы, некоторые учителя отмечали, что целенаправленное обучение практическим аспектам приведет к мотивации учащихся на изучение математики, к осознанию ими необходимости математических знаний. Я с этим согласна. Хорошо известно из практики, что мотивация падает к концу 7-го класса — дети просто не понимают ценности тех абстрактных знаний, которыми они должны овладевать. Практические задачи, построенные на материале из разных контекстов, помогут сформировать понимание востребованности математических знаний.

Скажем, задания на бытовом контексте: «Сколько можно сэкономить, если воспользуюсь акцией?», «Как рассчитать количество и стоимость материалов для ремонта?» Они увидят, что постановка таких вопросов даст конкретный финансовый результат, научит экономить. Например, съесть одну пиццу диаметром 40 см и две пиццы диаметром 20 см — это одно и то же?

А задания на образовательном контексте: Сколько отметок надо исправить, чтобы получить нужный средний балл? Они помогут научиться принимать правильные решения, находить альтернативные выходы из ситуации.

Или на общественном контексте: Как правильно интерпретировать результаты опроса? Рассчитать вероятность удачной покупки в интернете? Обеспеченность парковочными местами возле своего дома? Эти задания обогатят социальный опыт, включенность в социум.

В развитии познавательной сферы помогут задания, построенные на научном контексте: Как разобраться с демографическими данными? Выразить математическую зависимость? Описать физическую закономерность формулой?

Каждое приобретенное умение — это опыт, который делает человека более уверенным, свободным, самостоятельным и независимым. Я могу это сделать самостоятельно, а не обращаться к кому-то. Это практическая сторона функциональной грамотности, но есть и интеллектуальная: опыт делает человека умнее.

Е.З. Давайте задумаемся о будущем ребенка. Мы все хотим, чтобы он стал благополучным и успешным. Мы не можем предсказать, какие профессии будут нужны в будущем, какие прикладные и профессиональные навыки потребуются ребенку для построения успешной траектории своего развития. Но для укрепления его позиции в будущем, для его конкурентоспособности мы можем и должны обучить его функциональной грамотности, в том числе и математической. Родителям пятиклассников пожелаю прилагать свои силы и возможности для формирования и развития интеллекта и социального опыта у своих детей. Приведу пример с непониманием условия задачи о питомце из РДР в Московской области, где для решения подразумевалось несложное арифметическое вычисление. Условие задачи:

В августе Лиза купила еноту еду на месяц: три пакета специального корма (масса корма в одном пакете 1 кг 400 г), 2 кг винограда по 100 рублей, полкило смеси орехов по 600 рублей за килограмм и 2 десятка перепелиных яиц по 60 рублей. Сколько стоило питание для енота на месяц, если пакет корма стоил 500 рублей?

Ошибку совершили те пятиклассники, кто не понял условие «Два десятка перепелиных яиц по 60 рублей» в контексте реальной жизни, посчитав, что стоимость одного яйца 60 рублей. Подобных примеров много.

К этому мне остается добавить только последнее. На одной из встреч с учителями по вопросам функциональной грамотности я задала аудитории тот же самый вопрос: «Зачем это нужно нашим детям?» Участники встречи ненадолго замолчали, задумавшись. Неожиданно один из старшеклассников, который обеспечивал техническое сопровождение встречи, громко сказал в тишине: «Это надо не вам, это надо нам!»

Коллеги, благодарю Вас за профессиональный разговор.

Из интернета

Теорема «Звезда Давида»

https://mathworld.wolfram.com/StarofDavidTheorem.html

Эта теорема представляет собой одно из арифметических свойств биномиальных коэффициентов.

Согласно «Wolfram's Mathworld», данная теорема впервые была доказана Г.В. Гулдом в 1972 году. Практически сразу же появилось несколько ее обобщений. Изначально связь теоремы с треугольником Паскаля не была замечена, однако в 2002 году на нее указал Б. Баттерворт.

Теорема (Звезда Давида). Наибольший общий делитель чисел C_n^{k-1}, C_{n-1}^{k}, C_{n+1}^{k+1} равен наибольшему общему делителю чисел C_n^{k+1}, C_{n+1}^{k}, C_{n-1}^{k-1}.

Чтобы понять, почему эта теорема называется «Зезда Давида», посмотрите на рисунок 1.

Наибольший общий делитель чисел, стоящих в синих углах, и наибольший общий делитель чисел, стоящих в фиолетовых углах, равны. Вместе эти два треугольники образуют звезду Давида.

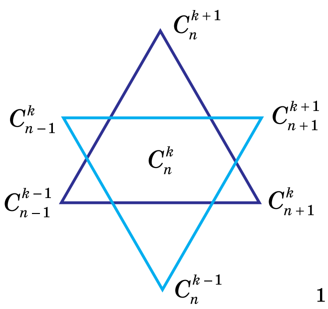


Рис. 1

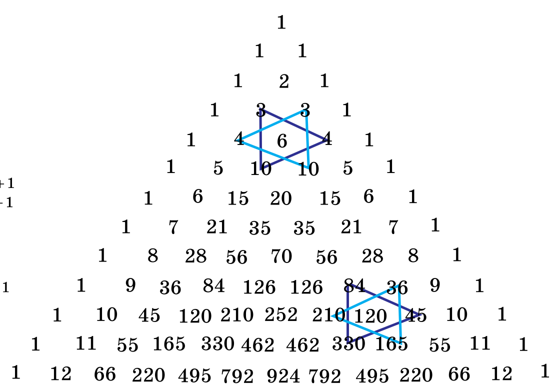


Рис. 2

Там, где есть биномиальные коэффициенты, бывает полезно использовать треугольник Паскаля.

На рисунке 2 верхняя звезда иллюстрирует не очень интересный пример того, что

$$\text{НОД}(3;\,4;\,10) = \\ = \text{НОД}(3;\,4;\,10) = \\ = 1\ (n = 4,\ k = 2),$$

вторая звезда

$$\text{НОД}(36;\,210;\,165) = \\ = \text{НОД}(84;\,45;\,330) = \\ = 3\ (n = 10,\ k = 7).$$

Е. МИХАЙЛОВ,
д. Заболотье,
Архангельская обл.

ДЕСЯТИЧНАЯ ЗАПИСЬ ЧИСЛА

Без сомнения, самой сложной задачей ЕГЭ по математике является задача 19. Одним из основных отличий этой задачи от остальных является ее нестандартный характер, а сведения, необходимые для ее решения, могут относиться к самым различным разделам школьного курса. Очень часто задача 19 имеет теоретико-числовой характер. Для успешного решения таких задач с ними надо как можно раньше знакомиться. Предлагаемый материал посвящен задачам, связанным с десятичной записью числа.
Все представленные задачи предлагались на олимпиадах разного уровня или в вариантах ЕГЭ.

Всякое натуральное число N единственным образом представимо в виде

$$N = a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + a_{n-2}\cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2\cdot 10^2 + a_1\cdot 10 + a_0,$$

где n — натуральное число, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0 — цифры от 0 до 9, причем цифра $a_{n-1} \neq 0$. Такое представление натурального числа N называется записью числа в десятичной системе счисления или десятичной записью числа. Для краткости это число записывают в виде

$$N = \overline{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_2a_1a_0}.$$

Черта сверху ставится для того, чтобы отличить десятичную запись числа от произведения $a_{n-1}\cdot a_{n-2}\cdot\ldots\cdot a_2\cdot a_1\cdot a_0$.

Натуральное число N является n-значным в том и только том случае, если оно удовлетворяет неравенству

$$10^{n-1} \le N < 10^n.$$

Дробные числа записываются в виде строки цифр с разделителем «десятичная запятая», называемой еще десятичной дробью:

$$\overline{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0,a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-(m-1)}a_{-m}} = \sum_{k=-m}^{n-1} a_k10^k.$$

где n — число разрядов целой части числа, m — число разрядов дробной части. Следует заметить, что не все числа представимы в виде такой записи, включающей конечное число цифр.

Первая серия задач связана с арифметическими операциями с многозначными и n-значными числами.

Задача 1. Пусть n = 99...9 (2019 девяток). Сколько девяток в десятичной записи числа n^2?

Решение. Выполним следующие преобразования:

$$n^2 = 99\ldots9^2 = \underbrace{99\ldots9}_{2019}\cdot\left(\underbrace{100\ldots0}_{2019}-1\right) =$$

$$= \underbrace{99\ldots9}_{2019}\underbrace{00\ldots0}_{2019} - \underbrace{99\ldots9}_{2019} = \underbrace{99\ldots9}_{2018}8\underbrace{00\ldots0}_{2019} + 1\underbrace{00\ldots0}_{2019} - \underbrace{99\ldots9}_{2019} =$$

$$= \underbrace{99\ldots9}_{2018}8\underbrace{00\ldots0}_{2019} + 1 = \underbrace{99\ldots9}_{2018}8\underbrace{00\ldots0}_{2018}1.$$

Литература
1. Электронный ресурс Десятичная система счисления. — Режим доступа: wikipedia.org/wiki/Десятичная_система_счисления. 2. *Буфеев С.В.* Коллекция задач по арифметике целых чисел: Задания С6 ЕГЭ. — М.: ЛИБРОКОМ, 2013. 3. *Прасолов В.В.* Задачи по алгебре, арифметике и анализу. — М.: МЦНМО, 2011. 4. *Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика. Алгебра. — М.: ФИЗМАТЛИТ.

Таким образом, в десятичной записи числа n^2 цифра 9 содержится 2018 раз.

Задача 2. Десятичная запись числа $A = 33...3$ содержит 999 троек, а запись числа $B = 66...6$ — 999 шестерок. Найдите произведение $A \cdot B$?

Решение.

$$A \cdot B = \underbrace{33\ldots3}_{999} \cdot \underbrace{66\ldots6}_{999} = \underbrace{33\ldots3}_{999} \cdot 3 \cdot \underbrace{22\ldots2}_{999} =$$

$$= \underbrace{99\ldots9}_{999} \cdot \underbrace{22\ldots2}_{999} = \underbrace{22\ldots2}_{999} \cdot \left(1\underbrace{00\ldots0}_{999} - 1\right) =$$

$$= \underbrace{22\ldots2}_{999}\underbrace{00\ldots0}_{999} - \underbrace{22\ldots2}_{999} = \underbrace{22\ldots2}_{998}1\underbrace{00\ldots0}_{999} +$$

$$+ \left(1\underbrace{00\ldots0}_{999} - \underbrace{22\ldots2}_{999}\right) =$$

$$= \underbrace{22\ldots2}_{998}1\underbrace{00\ldots0}_{999} + \underbrace{77\ldots7}_{998}8 = \underbrace{22\ldots2}_{998}1\underbrace{77\ldots7}_{998}8.$$

Задача 3. Докажите, что при любом натуральном n число $\underbrace{11\ldots1}_{n}2\underbrace{11\ldots1}_{n}$ является составным.

Решение.

$$\underbrace{11\ldots1}_{n}2\underbrace{11\ldots1}_{n} = \underbrace{11\ldots1}_{n+1}\underbrace{00\ldots0}_{n} + \underbrace{11\ldots1}_{n+1} =$$

$$= \underbrace{11\ldots1}_{n+1} \cdot 1\underbrace{00\ldots0}_{n-1}1.$$

Задача 4. Докажите, что число 1 280 000 401 является составным.

Решение. Знаем, что

$$1\,280\,000\,401 = 20^7 + 20^2 + 1.$$

Положим $a = 20$. Имеем следующее разложение:

$$a^7 + a^2 + 1 = a^7 - a + a^2 + a + 1 =$$
$$= a(a^6 - 1) + a^2 + a + 1 =$$
$$= a(a^3 + 1)(a^3 - 1) + a^2 + a + 1 =$$
$$= a(a^3 + 1)(a - 1)(a^2 + a + 1) + a^2 + a + 1 =$$
$$= (a^2 + a + 1)\,((a^3 + 1)(a^2 - a) + 1).$$

Следовательно, данное число составное.

Задача 5. Решите уравнение

$$x^2 + x = 1\,111\,111\,122\,222\,222.$$

Решение. Имеем, что

$$1\,111\,111\,122\,222\,222 =$$
$$= 11\,111\,111 \cdot 100\,000\,000 + 2 \cdot 11\,111\,111 =$$
$$= 11\,111\,111 \cdot 100\,000\,002.$$

Так как сумма цифр числа 100 000 002 делится на 3, то и само число делится на 3. Действительно,

$$100\,000\,002 = 99\,999\,999 + 3 =$$
$$= 3 \cdot (33\,333\,333 + 1) = 3 \cdot 33\,333\,334.$$

Таким образом,

$$x(x + 1) = 11\,111\,111 \cdot 3 \cdot 33\,333\,334 =$$
$$= 33\,333\,333 \cdot 33\,333\,334.$$

Заметим, что число $x_1 = 33\,333\,333$ является корнем уравнения. Второй корень можно найти по теореме Виета. Получим: $x_2 = -33\,333\,334$.

Задача 6. При каких натуральных значениях n число $\underbrace{10101\ldots101}_{n \text{ единиц}}$ является простым?

Решение. При $n = 1$ число равно 1, то есть не является ни простым, ни составным. При $n = 2$ данное число равно 101, то есть простое. Докажем, что при всех $n > 2$ число $\underbrace{10101\ldots101}_{n \text{ единиц}}$ является составным.

Рассмотрим два случая.

1. Если n четное, то указанное число делится на 101, значит, оно не является простым.

2. Если n нечетное. Умножим данное число на 11. Получим:

$$11 \cdot \underbrace{10101\ldots101}_{n \text{ единиц}} = \underbrace{11111\ldots111}_{2n}.$$

Получившееся число делится на $\underbrace{111\ldots111}_{n}$, значит, и произведение $11 \cdot \underbrace{10101\ldots101}_{n \text{ единиц}}$ делится на $\underbrace{111\ldots11}_{n}$ Но так как n нечетное и числа 11 и $\underbrace{111\ldots111}_{n}$ взаимно простые, следовательно, число $\underbrace{10101\ldots101}_{n \text{ единиц}}$ делится на $\underbrace{111\ldots111}_{n}$, поэтому оно составное.

Таким образом, только при $n = 2$ число $\underbrace{10101\ldots101}_{n \text{ единиц}}$ является простым.

В решении следующей серии задач, применяя неравенства, произведем оценку необходимых величин.

Задача 7. Пятизначное число A записывается только двойками и тройками, а пятизначное число B — только тройками и четверками. Может ли произведение $A \cdot B$ записываться только двойками и четверками?

Решение. Произведение этих чисел заключено в промежутке от $22\,222 \cdot 33\,333$ до $33\,333 \cdot 44\,444$, то есть от 740 725 926 до 1 481 451 852. Поэтому первая цифра произведения не может равняться ни 2, ни 4.

Задача 8. Пятизначное число A записывается только единицами и двойками, а пятизначное число B — только двойками и тройками. Может ли произведение $A \cdot B$ записываться одними шестерками?

Решение. Способ I. Чтобы произведение оканчивалось на 6, необходимо, чтобы первый сомножитель оканчивался на 2, а второй — на 3. Последние две цифры произведения однозначно определяются последними двумя цифрами сомножителей. Легко проверить, что ни одно из произведений — 12 на 23, 12 на 33, 22 на 23, 22 на 33 — не оканчивается на 66.

Способ II. Так как пятизначное число A записывается только единицами и двойками, то

$$10^4 < A < 3 \cdot 10^4.$$

Пятизначное число B записывается только двойками и тройками, значит,

$$2 \cdot 10^4 < B < 4 \cdot 10^4.$$

Следовательно,

$$2 \cdot 10^8 < AB < 12 \cdot 10^8.$$

В этот промежуток входит только одно число, записанное одними шестерками: $C = \underbrace{66\ldots6}_{9}$. Попробуем найти такие числа A и B, что $AB = C$.

Рассмотрим несколько случаев в зависимости от первых цифр чисел A и B.

1. Если число A начинается с 1, а число B — с 2, то

$$1{,}1 \cdot 10^4 < A < 1{,}3 \cdot 10^4 \text{ и } 2{,}2 \cdot 10^4 < B < 2{,}4 \cdot 10^4,$$

откуда

$$AB < 1{,}3 \cdot 10^4 \cdot 2{,}4 \cdot 10^4 = 3{,}12 \cdot 10^8 < C.$$

2. Если числа A и B начинаются с цифры 2, то

$$2{,}1 \cdot 10^4 < A < 2{,}3 \cdot 10^4 \text{ и } 2{,}2 \cdot 10^4 < B < 2{,}4 \cdot 10^4,$$

откуда

$$AB < 2{,}3 \cdot 10^4 \cdot 2{,}4 \cdot 10^4 = 5{,}52 \cdot 10^8 < C.$$

3. Если число A начинается с 1, а число B — с 3, то

$$1{,}1 \cdot 10^4 < A < 1{,}3 \cdot 10^4 \text{ и } 3{,}2 \cdot 10^4 < B < 3{,}4 \cdot 10^4,$$

откуда

$$AB < 1{,}3 \cdot 10^4 \cdot 3{,}4 \cdot 10^4 = 4{,}42 \cdot 10^8 < C.$$

4. Если число A начинается с 2, а число B — с 3, то

$$2{,}1 \cdot 10^4 < A < 2{,}3 \cdot 10^4 \text{ и } 3{,}2 \cdot 10^4 < B < 3{,}4 \cdot 10^4,$$

откуда

$$AB > 2{,}1 \cdot 10^4 \cdot 3{,}2 \cdot 10^4 = 6{,}72 \cdot 10^8 > C.$$

Таким образом, произведение чисел A и B не может записываться одними шестерками.

Задача 9. Докажите, что число $1\underbrace{00\ldots0}_{49}5\underbrace{00\ldots0}_{99}1$ не является кубом никакого целого числа.

Решение. Рассматриваемое число равно

$$10^{150} + 5 \cdot 10^{100} + 1.$$

Оно больше

$$(10^{50} + 1)^3 = 10^{150} + 3 \cdot 10^{100} + 3 \cdot 10^{50} + 1,$$

но меньше

$$(10^{50} + 2)^3 = 10^{150} + 6 \cdot 10^{100} + 12 \cdot 10^{50} + 8.$$

Таким образом, оно не может быть точным кубом.

Задача 10. Подряд записано 99 девяток. Докажите, что к ним можно приписать справа 100 цифр так, чтобы получившееся 199-значное число оказалось полным квадратом.

Решение. Приписывая 100 цифр к числу $\underbrace{99\ldots9}_{99} = 10^{99} - 1$ справа, мы можем получить любое натуральное число из интервала $[(10^{99} - 1) \cdot 10^{100}; 10^{199})$. Таким образом, требуется найти такое натуральное число A, что

$$(10^{99} - 1) \cdot 10^{100} \le A^2 < 10^{199},$$

откуда

$$\sqrt{10^{199} - 10^{100}} \le A < \sqrt{10^{199}}.$$

Так как

$$\sqrt{10^{199}} - \sqrt{10^{199} - 10^{100}} = \frac{10^{100}}{\sqrt{10^{199}} + \sqrt{10^{199} - 10^{100}}} >$$

$$> \frac{10^{100}}{2\sqrt{10^{199}}} = \frac{\sqrt{10}}{2} > 1,$$

то искомое целое число A гарантированно найдется. Более того, из полученных неравенств следует, что в качестве числа A можно взять

$$\left[\sqrt{10^{199}}\right] = \left[10^{99}\sqrt{10}\right].$$

Замечание. Похожим образом можно доказать, что квадрат натурального числа может начинаться с любой комбинации цифр.

Задача 10 открывает серию из нескольких задач, связанных с десятичной записью точного квадрата.

Задача 11. Докажите, что у числа, являющегося точным квадратом, произведение двух последних цифр четно.

Решение. Пусть $B = A^2$, где $A = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$. Две последние цифры числа B совпадают с двумя последними цифрами числа $\overline{a_1 a_0}^2 = (10a_1 + a_0)^2$. Если a_0 четное число, то утверждение задачи очевидно. Пусть a_0 — нечетное число. Заметим, что число $100a_1^2 + 20a_1a_0$ оканчивается на ноль и имеет четное число десятков. При прибавлении a_0^2 число десятков либо не меняется, если $a_0 \in \{1, 3\}$, либо меняется на четное число, если $a_0 \in \{5, 7, 9\}$, так как $5^2 = 25$, $7^2 = 49$, $9^2 = 81$. Таким образом, если последняя цифра числа B нечетная, то предпоследняя — обязательно четная.

Задача 12. В записи точного квадрата более миллиона цифр. Каково наименьшее количество четных цифр?

Решение. Квадрат натурального числа не может заканчиваться на две нечетные цифры. Значит, найдется хотя бы одна четная цифра. Приведем пример, когда в записи точного квадрата ровно одна четная цифра, при этом количество цифр может быть больше миллиона. Имеем:

$$33\ldots34^2 = 33\ldots34 \cdot (33\ldots33 + 1) =$$
$$= 33\ldots34 \cdot 3 \cdot 11\ldots11 + 33\ldots34 =$$
$$= 100\ldots02 \cdot 11\ldots11 + 33\ldots34 =$$
$$= 11\ldots1122\ldots22 + 33\ldots34 = 11\ldots1155\ldots56$$

(многоточие везде заменяет одно и то же количество одинаковых цифр).

Задача 13. Найдите все значения n, при которых число $1\underbrace{444\ldots4}_{n}$ является квадратом натурального числа.

Решение. Число 14 не является полным квадратом, значит, $n \neq 1$. Так как

$$144 = 12^2,\ 1444 = 38^2,$$

то при $n = 2$ и $n = 3$ данное число является полным квадратом. Пусть $n \geq 4$ и $1\underbrace{444\ldots4}_{n} = a^2$, где $a \in \boldsymbol{N}$. Тогда число a четное, откуда $a = 2b$, где $b \in \boldsymbol{N}$. Имеем:

$$4b^2 = 144\underbrace{444\ldots4}_{n-2},\quad b^2 = 36\underbrace{11\ldots1}_{n-2}.$$

Пришли к противоречию, полный квадрат не может оканчиваться на две нечетные цифры. Таким образом, только при $n = 2$ и $n = 3$ указанное число является точным квадратом.

Рассмотрим несколько задач на делимость натуральных чисел.

Задача 14. а) Приведите пример четырехзначного числа, произведение цифр которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.

б) Существует ли такое четырехзначное число, произведение цифр которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?

в) Найдите все четырехзначные числа, произведение цифр которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

Решение. Для решения нам понадобится важное наблюдение. Среди цифр искомого числа не может быть нулей, так как иначе их произведение было бы равно нулю.

а) Обозначим искомое число $\overline{abcd}$, тогда

$$abcd = 10(a + b + c + d).$$

Так как правая часть полученного равенства делится на 5, то одна из цифр искомого числа равна 5. Положим $d = 5$. Значит,

$$abc = 2(a + b + c + 5).$$

Отсюда получаем, что хотя бы одна из цифр a, b или c четная. Попробуем найти решение, взяв $c = 2$. Имеем:

$$ab = a + b + 7.$$

Преобразуем полученное уравнение:

$$ab - a - b + 1 = 8,$$

$$(a - 1)(b - 1) = 8.$$

Числа $a = 2$, $b = 9$ являются решением этого уравнения. Таким образом, число 2925 является одним из возможных чисел, удовлетворяющих условию задачи.

б) Пусть $\overline{abcd}$ — искомое число, тогда

$$abcd = 175(a + b + c + d). \qquad (*)$$

Правая часть этого равенства делится на 25, значит, среди цифр a, b, c, d есть две пятерки (здесь мы используем тот факт, что все цифры не равны нулю). Так как при перестановке цифр числа $\overline{abcd}$ равенство (*) остается верным, то без ограничения общности можно считать, что $c = d = 5$. Но тогда

$$ab = 7(a + b + 10) \geq 7 \cdot 12 = 84 \geq 9 \cdot 9,$$

что невозможно. Значит, искомое число не существует.

в) Пусть $\overline{abcd}$ — искомое число, тогда

$$abcd = 50(a + b + c + d).$$

Правая часть этого равенства делится на 25, значит, среди цифр a, b, c, d есть две пятерки. Как и в пункте «б», можем считать, что $c = d = 5$. Тогда

$$ab = 2(a + b + 10),$$

откуда

$$(a - 2)(b - 2) = 24.$$

Цифры a и b не могут принимать значения 1 и 2. Значит, $(a - 2)$ и $(b - 2)$ — натуральные делители числа 24, причем

$$1 \leq a - 2 \leq 7 \text{ и } 1 \leq b - 2 \leq 7.$$

С точностью до перестановки возможен только один случай: $\begin{cases} a - 2 = 4, \\ b - 2 = 6, \end{cases}$

откуда $a = 6$, $b = 8$. Таким образом, все искомые числа получаются из числа 6855 перестановкой цифр. Всего существует 12 вариантов: 5568, 5586, 5658, 5685, 5856, 5865, 6558, 6585, 6855, 8556, 8565, 8655.

Задача 15. Существует ли 100-значное число без нулевых цифр, которое делится на сумму своих цифр?

Решение. Сумма цифр 100-значного числа без нулевых цифр не меньше 100. Попробуем вспомнить какой-нибудь признак делимости на трехзначное число. Такой признак есть. Число делится на 125 в том и только том случае, если число, образованное тремя последними цифрами, делится на 125. Подберем искомое 100-значное число так, чтобы сумма его цифр равнялась 125 и оно оканчивалось на 125. Такое число подобрать несложно, например, $\underbrace{1111\ldots111}_{94}599125$.

Часто в задачах на делимость используется следующий простой факт: число и сумма цифр этого числа дают одинаковые остатки при делении на 9. Отсюда следует, что если одно число получено из другого перестановкой цифр, то их разность делится на 9.

Задача 16. Имеется семь карточек с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Найдется ли два различных семизначных числа, составленных посредством этих карточек, таких, что одно из них делится на другое?

Решение. Докажем, что таких чисел не существует. Предположим, что из данных цифр можно составить такие два семизначных числа a и b, что $a > b$ и a делится на b. Тогда $(a - b)$ тоже делится на b. Значит, $\frac{a-b}{b} \in \boldsymbol{N}$, причем

$$\frac{a-b}{b} = \frac{a}{b} - 1 < 8 - 1 = 7.$$

С другой стороны, числа a и b имеют одинаковую сумму цифр, равную $1 + 2 + 3 + \ldots + 7 = 28$. Значит, $a - b$ делится на 9, а число b не делится на 3. Поэтому натуральное число $\frac{a-b}{b}$ делится на 9. Пришли к противоречию.

Задача 17. В натуральном числе x переставили цифры, получив число y. Известно, что

$$x - y = \underbrace{11\ldots11}_{n}.$$

Найдите наименьшее возможное значение n.

Решение. Числа x и y имеют одинаковый остаток при делении на 9. Значит, их разность делится на 9. Так как сумма цифр разности чисел x и y равна n, то n кратно 9. Таким образом, $n \geq 9$.

Покажем, что $n = 9$. Действительно,

$$9\,087\,654\,321 - 8\,976\,543\,210 = 111\,111\,111.$$

Числа вида 111 111 111 называют репьюнитами.

Определение. Репьюнитом (англ. repunit, от repeated unit — повторенная единица) называют натуральное число r_n вида $\underbrace{111\ldots111}_{n}$, то есть натуральное число, в десятичной записи которого встречаются только единицы.

Задача 18. Докажите, что ни одно из чисел 11, 111, 1111, ... не является точным квадратом.

Решение. *Способ I.* Пусть $r_n = \underbrace{11\ldots1}_{n} = a^2$. Очевидно, что a — нечетное число. Рассмотрим разность

$$r_n - 1 = a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1).$$

Числа $(a - 1)$ и $(a + 1)$ четные, следовательно, $r_n - 1$ делится на 4. Приходим к противоречию, так как $r_n - 1 = \underbrace{11\ldots1}_{n-1}0$ заканчивается на 10, а значит, не делится на 4.

Способ II. $r_n \equiv r_{n-2} \cdot 100 + 11 \equiv 11 \equiv 3 \pmod 4$.

Однако квадрат любого нечетного числа при делении на 4 дает остаток 1. Действительно,

$$(2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 \equiv 1 \pmod 4.$$

Таким образом, среди чисел r_n $(n \geq 2)$ нет точных квадратов.

Способ III. Квадрат любого числа содержит хотя бы одну четную цифру (задача 11). Следовательно, среди указанных чисел нет точных квадратов.

Задача 19. Докажите, что существует число вида 111...111, которое делится на 2019.

Решение. Предположим, что ни одно из чисел вида r_n не делится на 2019. Рассмотрим остатки от деления чисел 1, 11, 111, ..., $\underbrace{11\ldots1}_{2019}$ на 2019. Так как, по предположению, ни одно из чисел не делится на 2019, то остатка 0 быть не может. Значит, остатки могут принимать значения от 1 до 2018. По принципу Дирихле, найдется два числа, r_n и r_m $(n > m)$, остатки которых совпадают. Разность

$$r_n - r_m = \underbrace{11\ldots1}_{n-m}\underbrace{00\ldots0}_{m} = \underbrace{11\ldots1}_{n-m} \cdot 10^m$$

делится на 2019. Числа 10^m и 2019 взаимно простые, следовательно, $\underbrace{11\ldots1}_{n-m}$ делится на 2019. Пришли к противоречию. Таким образом, найдется репьюнит r_n, где $n \leq 2019$, который делится на 2019.

Задача 20. Число 11...11 делится на 7. Докажите, что оно делится и на 13.

Решение. Докажем критерий: число $r_n = \underbrace{11\ldots11}_{n}$ делится на 7 тогда и только тогда, когда n делится на 6. Числа 1, 11, 111, 1111, 11 111 на 7 не делятся, а число 111 111 делится на 7.

Пусть

$$n = 6q + r,$$

где $r = 0$ или 5. Тогда

$$r_n = \underbrace{11\ldots11}_{6q+r} = 111111\underbrace{00\ldots00}_{6(q-1)+r} + 111111\underbrace{00\ldots00}_{6(q-2)+r} + \ldots +$$

$$+ 111111\underbrace{0\ldots0}_{r} + \underbrace{1\ldots1}_{r}.$$

Все слагаемые, кроме последнего, делятся на 7, а последнее делится на 7 только при $r = 0$. Таким образом, если $r_n = \underbrace{11\ldots11}_{n}$ делится на 7, то n кратно 6, при этом число r_n делится на r_6. Так как

$$r_6 = 111\,111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37,$$

то r_n делится на 13.

Задача 21. Докажите, что число $\underbrace{111\ldots11}_{27}$ делится на 27.

Решение. По признаку делимости на 9, число $r_9 = 11\ldots1$ кратно 9. Заметим, что

$$r_{27} = r_9 \cdot \left(10^{18} + 10^9 + 1\right) = r_9 \cdot 1\underbrace{00\ldots0}_{8}1\underbrace{00\ldots0}_{8}1,$$

причем первый множитель делится на 9, а второй на 3 (так как сумма цифр второго множителя равна 3). Значит, произведение делится на 27.

Замечание. Применяя этот же способ, можно доказать, что число r_{3^n} делится на 3^n, но не делится на 3^{n+1}.

Задача 22. Существует ли квадратный трехчлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что для любого натурального числа n, в десятичной записи которого участвуют одни единицы, число $P(n)$ также записывается одними единицами?

Решение. Обратим внимание на следующие соотношения:

$$111 \cdot 1001 = 111\,111,$$
$$1111 \cdot 10\,001 = 11\,111\,111.$$

Проверим, удастся ли найти такой квадратный трехчлен $P(x)$, который увеличивает количество цифр репьюнита в два раза. Преобразуем дробь:

$$\frac{r_{2k}}{r_k} = \frac{\overbrace{11\ldots1}^{k}\overbrace{11\ldots1}^{k}}{\underbrace{11\ldots1}_{k}} = 1\underbrace{00\ldots0}_{k}1 =$$

$$= \underbrace{99\ldots9}_{k} + 2 = 9r_k + 2.$$

Таким образом,

$$r_{2k} = r_k \cdot (9r_k + 2);$$

квадратный трехчлен

$$P(x) = x(9x + 2)$$

удовлетворяет всем условиям задачи.

Рассмотрим несколько комбинаторных задач.

Задача 23. Для каждого трехзначного числа выписали произведение его цифр. Чему равна сумма всех выписанных чисел?

Решение. Рассмотрим произведение

$$(1 + 2 + \ldots + a + \ldots + 9) \times$$
$$\times (0 + 1 + 2 + \ldots + b + \ldots + 9) \times$$
$$\times (0 + 1 + 2 + \ldots + c + \ldots + 9).$$

Раскрыв скобки, получим сумму 900 слагаемых вида $a \cdot b \cdot c$. Каждое такое слагаемое соответствует произведению цифр трехзначного числа $\overline{abc}$. При этом каждому трехзначному числу соответствует ровно одно слагаемое. Так как сумма чисел в каждой скобке равна 45, то искомая сумма произведений равна 45^3.

Задача 24. Для каждого числа от 1 до 999 выписали сумму его цифр. Чему равна сумма всех выписанных чисел?

Решение. Цифры 0 на сумму не влияют, а каждая ненулевая цифра 100 раз встречается в разряде единиц, 100 раз в разряде десятков и 100 раз в разряде сотен. Поэтому сумма всех цифр равна

$$300(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) =$$
$$= 300 \cdot 45 = 13\,500.$$

Задача 25. В 100-значном числе 12345678901234…7890 вычеркнули все цифры, стоящие на нечетных местах; в полученном 50-значном числе вновь вычеркнули все цифры, стоящие на нечетных местах, и т.д. Вычеркивание продолжалось до тех пор, пока было что вычеркивать. Какая цифра была вычеркнута последней?

Решение. После первого вычеркивания останутся лишь те цифры, первоначальные номера которых четные, после второго — те, чьи первоначальные номера делились на 4, после третьего — на 8 и т.д. Перед последним вычеркиванием останется цифра, первоначальный номер которой равен наибольшей возможной степени 2, то есть равен 64. Это цифра 4.

Задача 26. В числе A цифры идут в возрастающем порядке (слева направо). Чему равна сумма цифр числа $9A$?

Решение. Так как цифры числа A идут в возрастающем порядке, то количество цифр не превосходит 9 (первая цифра не меньше 1). Обозначим

$$A = \overline{a_k a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_2 a_1},$$

$k \le 9$, при этом $\{a_k\}$ — убывающая последовательность цифр. Заметим, что $9A = 10A - A$. Выполним вычитание в столбик. (Для наглядности каждую цифру запишем в отдельную клетку таблицы.)

	a_k	a_{k-2}	a_{k-2}	…	a_2	a_1	0
–							
		a_k	a_{k-1}	…	a_3	a_2	a_1
	a_k	$a_{k-1} - a_k$	$a_{k-2} - a_{k-1}$	…	$a_2 - a_3$	$a_1 - 1 - a_2$	$10 - a_1$

Чтобы произвести вычитание в младшем разряде, приходится занимать единицу в разряде десятков. При этом в разряде единиц получим цифру $(10 - a_1)$.

Так как цифры числа A идут в возрастающем порядке, то в следующих разрядах занимать не приходится. Имеем:

$$a_1 - 1 - a_2 \ge 0,\ a_2 - a_3 > 0,\ \ldots,\ a_{k-1} - a_k > 0.$$

Таким образом, мы нашли все цифры числа $9A$. Сумма этих цифр равна

$$a_k + (a_{k-1} - a_k) + (a_{k-2} - a_{k-1}) + \ldots$$
$$\ldots + (a_3 - a_4) + (a_2 - a_3) + (a_1 - a_2 - 1) + (10 - a_1) =$$
$$= 10 - 1 = 9.$$

Задача 27. Число y получается из натурального числа x некоторой перестановкой его цифр. Докажите, что если $x + y = 10^{1000}$, то число x делится на 10.

Решение. Очевидно, что числа x и y являются 1000-значными. Пусть

$$x = \overline{x_{999} x_{998} \ldots x_1 x_0},\quad y = \overline{y_{999} y_{998} \ldots y_1 y_0}.$$

Предположим, что $x_0 \neq 0$. Тогда
$$x_0 + y_0 = 10.$$
Так как
$$x_1 + y_1 + 1 \leq 19$$
и число десятков в сумме $(x + y)$ равно 0, то
$$x_1 + y_1 = 9.$$
Аналогично получим, что
$$x_k + y_k = 9$$
при всех натуральных значениях k от 1 до 999.

Так как число y получено перестановкой цифр числа x, то сумма
$$(x_0 + y_0) + (x_1 + y_1) + \ldots + (x_{999} + y_{999})$$
четна. С другой стороны, эта сумма равна нечетному числу $10 + 999 \cdot 9$. Значит, предположение неверно и
$$x_0 = y_0 = 0.$$
Таким образом, числа x и y делятся на 10.

Задача 28. Число y получается из натурального числа x некоторой перестановкой его цифр. Докажите, что, каково бы ни было число x, сумма
$$x + y \neq \underbrace{9999\ldots99}_{1001}.$$

Решение. Предположим, что такие числа x и y существуют. Заметим, что эти числа состоят из одинакового количества цифр. Если количество цифр в записи чисел x и y меньше 1001, то
$$x + y \leq \underbrace{999\ldots9}_{1000} + \underbrace{999\ldots9}_{1000} < 2 \cdot \underbrace{100\ldots00}_{1000} =$$
$$= 2\underbrace{00\ldots00}_{1000} < \underbrace{9999\ldots99}_{1001}.$$

Значит, числа x и y содержат 1001 цифру.

Пусть
$$x = \overline{x_{1000}x_{999}\ldots x_2x_1x_0}, \quad y = \overline{y_{1000}y_{999}\ldots y_2y_1y_0}.$$
Тогда
$$y_k = 9 - x_k.$$
Отсюда получим, что число нулей в записи числа x равно числу девяток, число единиц — числу восьмерок, ..., число четверок — числу пятерок. Но это невозможно, так как число x состоит из нечетного количества цифр.

Задача 29. В десятичной записи некоторого числа цифры расположены в порядке убывания (слева направо). Может ли это число быть кратным числу 111?

Решение. Предположим, что существует хотя бы одно число, кратное 111, цифры которого расположены в порядке убывания. Рассмотрим наименьшее из таких чисел. Обозначим его A. Возможны два случая.

1. Число A оканчивается на 0, то есть делится на 10. Так как 10 и 111 взаимно простые числа, то число $\frac{A}{10}$ делится на 111, а цифры в его записи расположены в порядке убывания.

2. Если последняя цифра числа A не равна нулю. Тогда $A - 111$ также делится на 111, а цифры в его записи снова расположены в порядке убывания.

В обоих случаях получаем противоречие с тем, что число A наименьшее. Следовательно, чисел, удовлетворяющих всем условиям задачи, не существует.

Прием, который мы применили в решении данной задачи, называется *метод спуска* или *метод минимального контрпримера*.

Задача 30. а) Приведите пример семизначного числа, вычеркивая цифры из которого можно получить каждое из чисел: 123, 426, 786.

б) Существует ли девятизначное число, вычеркивая цифры из которого можно получить каждое из чисел: 123, 238, 435, 567, 791?

в) Найдите наименьшее число, из которого можно получить все числа от 1 до 40 включительно, вычеркивая из него цифры.

Решение. а) Например, из числа 1 423 786 получается каждое из чисел: 123, 426, 786.

б) В указанных числах встречаются все цифры от 1 до 9, значит, каждая из этих цифр должна присутствовать в девятизначном числе по одному разу. Тогда цифра 1 должна стоят в записи числа перед 3, после 3 должна стоять 5, после 5 — 7, а после 7 — снова 1. Таким образом, в записи числа должно быть не менее двух единиц, что невозможно.

в) Заметим, что из искомого числа должны получаться числа 11, 22 и 33, поэтому в его записи должно присутствовать не менее двух единиц, двух двоек и двух троек и каждая из остальных цифр. То есть в нем должно быть не менее 13 цифр.

13-значное число 1 231 234 056 789 удовлетворяет условию задачи.

Покажем, что не существует меньшего числа, которое удовлетворяет условию задачи. Для каждого разряда числа, начиная со старшего, будем выбирать наименьшую возможную цифру.

Первая цифра не может быть меньше 1. Заметим, что 0 должен идти после цифры 4, поскольку иначе нельзя получить число 40; между двумя единицами должны быть 2 и 3, поскольку иначе нельзя получить числа 21 и 31, поэтому вторая цифра должна быть 2. Между двумя двойками должна быть тройка, поскольку иначе нельзя получить число 32, поэтому третья цифра должна быть 3. Далее можно использовать по порядку наименьшие оставшиеся цифры, кроме 0, до тех пор, пока не появится цифра 4. После нее должен идти 0, а затем оставшиеся цифры в порядке возрастания.

Задача 31. Мегамозг придумал десятизначное натуральное число. Первая (слева) цифра этого числа равна количеству нулей в его записи, вторая цифра — количеству единиц, третья — количеству двоек и т.д., последняя цифра равна количеству девяток в записи этого числа. А вы сможете повторить достижение Мегамозга и найти это число?

Решение. Пусть $A=\overline{a_0a_1a_2\ldots a_8a_9}$ — искомое число. По условию задачи,

$$a_0+a_1+\ldots+a_8+a_9=10.$$

Понятно, что $a_0\geq 1$. Пусть $a_0=k$, то есть в записи числа ровно k нулей. Эти k нулей и цифра a_0 занимают в десятичной записи искомого числа $(k+1)$-е место, а сумма этих цифр равна k. Поэтому оставшиеся $10-(k+1)=9-k$ цифр дают в сумме $10-k$. Так как среди этих (оставшихся) цифр нет нулей, то единственный возможный случай, когда одна из цифр равна 2, а остальные единицы (иначе сумма будет больше $10-k$).

Таким образом, если $k>2$, то

$$a_0=k,\ a_2=1,\ a_1=8-k,$$

то есть

$$a_3+a_4+\ldots+a_9=10-(a_0+a_1+a_2)=1.$$

Следовательно, среди чисел a_3, a_4, ..., a_9 одна единица, а остальные цифры — нули. Отсюда следует, что число нулей

$$a_0=k=6,\ a_1=8-k=8-6=2,$$
$$a_6=1,\ a_3=a_4=a_5=a_7=a_8=a_9=0.$$

Искомое число равно 6 210 001 000.

Легко показать, что случаи $k=1$ и $k=2$ не дают решения. Значит, 6 210 001 000 — единственное число, удовлетворяющее условию задачи.

Последняя серия задач посвящена задачам на десятичную запись дробных чисел.

Задача 32. В десятичной записи числа $\frac{1}{7}$ зачеркнули 999-ю цифру после запятой, остальные цифры не меняли. Как изменилось число: увеличилось или уменьшилось?

Решение. Вычислим период этой дроби. Получим, что $\frac{1}{7}=0,(142857)$. Длина периода равна 6. Так как

$$999=6\cdot 166+3,$$

то 999-я цифра после запятой в десятичной записи числа $\frac{1}{7}$ — это третья цифра периода, то есть цифра 2. После ее зачеркивания на этом месте будет стоять цифра 8. Следовательно, полученное число больше исходного.

Задача 33. Найдите первые три цифры после запятой в десятичной записи частного от деления числа 0,123456789101112...495051 на число 0,515049...121110987654321.

Решение. Запишем частное q данных десятичных дробей в виде обыкновенной дроби:

$$q=\frac{123456789101112\ldots495051}{515049\ldots121110987654321}.$$

Оценим число q сверху и снизу. Имеем:

$$q<\frac{1235}{5150}<0,240,\ \text{но}\ q>\frac{1234}{5151}>0,239.$$

Таким образом, десятичная запись числа начинается с 0,239.

Задача 34. При каком наименьшем натуральном b в десятичной записи правильной дроби $\frac{a}{b}$ после запятой могут встретиться подряд цифры 0,...2021...?

Решение. Умножая данную дробь на подходящую степень числа 10, можно получить дробь, у которой цифры 2021 записаны сразу после десятичной запятой. При этом знаменатель полученной дроби не превосходит b. Таким образом, можно считать, что $\frac{a}{b}=0,2021\ldots$.

Заметим, что

$$\frac{a}{b}-\frac{1}{5}<0,0022=\frac{11}{5000}.$$

С другой стороны,

$$\frac{a}{b}-\frac{1}{5}=\frac{5a-b}{5b}\geq\frac{1}{5b}.$$

Значит,

$$\frac{1}{5b}<\frac{11}{5000},\quad b>\frac{1000}{11}=90\frac{10}{11}.$$

Проведем перебор различных значений b.

1. Если $b=91$, то

$$\frac{18}{91}<\frac{18}{90}=0,2<0,2021\ldots,$$
$$\frac{19}{91}=0,2087\ldots>0,2021\ldots.$$

Значит, $b=91$ не удовлетворяет условию задачи.

2. Если $b=92$, то

$$\frac{18}{92}<\frac{18}{90}=0,2<0,2021\ldots,$$
$$\frac{19}{92}=0,2065\ldots>0,2021\ldots.$$

Значит, $b\neq 92$.

3. Если $b=93$, то

$$\frac{18}{93}<\frac{18}{90}=0,2<0,2021\ldots,$$
$$\frac{19}{93}=0,2043\ldots>0,2021\ldots.$$

Значит, $b\neq 93$.

4. Если $b=94$, то

$$\frac{19}{94}=0,2021\ldots.$$

Таким образом, $b=94$ — наименьший возможный знаменатель.

Материал подготовлен
А. БЛИНКОВЫМ,
г. Москва

МОСКОВСКИЕ УСТНЫЕ ОЛИМПИАДЫ

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ

Логика и алгоритмы

1. (*М. Евдокимов*) Трем мудрецам показали 9 карт: шестерку, семерку, восьмерку, девятку, десятку, вальта, даму, короля и туза (карты перечислены по возрастанию их достоинства). После этого карты перемешали и каждому раздали по три карты. Каждый мудрец видит только свои карты. Первый сказал: «Моя старшая карта — валет». Тогда второй ответил: «Я знаю, какие карты у каждого из вас». У кого из мудрецов был туз?

Ответ: у третьего мудреца.

Решение. У первого мудреца старшая карта — валет, значит, у него ровно две карты младше валета, то есть две карты из набора 6, 7, 8, 9, 10. Чтобы второй мудрец мог наверняка знать карты каждого, у него должны быть три остальные карты из этого набора (иначе он не смог бы однозначно определить карты первого мудреца). Тогда дама, король и туз у третьего мудреца.

2. (*А. Шаповалов*) На левом берегу реки собрались пять физиков и пять химиков. Всем надо на правый берег. Есть двухместная лодка. На правом берегу ни в какой момент не могут находиться ровно три химика или ровно три физика. Каким образом им всем переправиться, сделав 9 рейсов на правый берег?

Решение. См. таблицу.

Номер рейса	Левый берег	Уехали на правый	Вернулись на левый	Правый берег
0	5 физиков, 5 химиков	—	—	—
1	5 физиков, 4 химика	2 химика	1 химик	1 химик
2	4 физика, 4 химика	2 физика	1 физик	1 физик, 1 химик
3	4 физика, 3 химика	1 физик, 1 химик	1 физик	1 физик, 2 химика
4	5 физиков, 1 химик	2 химика	1 физик	4 химика
5	5 физиков	1 физик, 1 химик	1 физик	5 химиков
6	3 физика, 1 химик	2 физика	1 химик	2 физика, 4 химика
7	3 физика	1 физик, 1 химик	1 физик	2 физика, 5 химиков
8	1 физик, 1 химик	2 физика	1 химик	4 физика, 4 химика
9	—	1 физик, 1 химик	—	5 физиков, 5 химиков

3. (*А. Шаповалов*) К кабинке канатной дороги, ведущей на гору, подошли четыре человека, которые весят 50, 60, 70 и 90 кг. Смотрителя нет, а в автоматическом режиме кабинка поднимается и опускается только с грузом от 100 до 250 кг (пустой она не начнет движения) при условии, что пассажиров можно рассадить на две скамьи так, чтобы веса на скамьях отличались не более, чем на 25 кг. Каким образом все они смогут подняться на гору?

Решение. Будем обозначать людей числами, соответствующими их весу. Тогда возможен следующий алгоритм действий:

1) вверх едут 50 + 60 и 90;
2) вниз едут 50 и 60;
3) вверх едут 60 и 70;
4) вниз едут 70 и 90;
5) вверх едут 50 и 70;
6) вниз едут 50 и 60;
7) вверх едут 50 + 60 и 90.

Комментарий. Из условия задачи следует, что втроем могут ехать только 50, 60 и 90. А спускаться должны не менее чем двое. Значит, и первый, и последний подъемы должны совершить 50, 60 и 90.

4. (*А. Шаповалов*) На кружок пришли дети из двух классов: Ваня, Дима, Егор, Инна, Леша, Саша и Таня. На вопрос: «Сколько здесь твоих одноклассников?» — каждый честно дал один из двух вариантов ответа: «Двое» или «Трое». Но мальчики думали, что спрашивают только про мальчиков-одноклассников, а девочки правильно понимали, что спрашивают про всех. Кто Саша — мальчик или девочка?

Ответ: Саша — девочка.

Решение. Пол каждого ребенка, кроме Саши, определяется по именам однозначно, поэтому мальчиков на кружке либо 4, либо 5.

Предположим, что какие-то мальчики учатся в разных классах, тогда их ответы показывают, что на кружок пришло не менее трех мальчиков из каждого класса. Противоречие. Следовательно, все присутствующие мальчики — одноклассники, но тогда их не могло быть пятеро. Значит, Саша — девочка.

Комментарий. Отметим, что описанная ситуация возможна. Действительно, если Саша — девочка, то четыре мальчика учатся в одном классе, а три девочки — в другом. При этом каждый мальчик дал ответ «Трое», а каждая девочка — «Двое».

5. (*А. Банникова*) У Буратино есть пять монет, ровно одна из них фальшивая. Какая именно — известно только Коту Базилио. Буратино может показать Коту любые две монеты, заплатив ему еще одну за услугу: за одну монету Кот скажет, есть ли фальшивая среди указанной пары монет. Буратино знает, что Кот, получив настоящую монету, скажет правду, а получив фальшивую — соврет. Как Буратино определить фальшивую монету среди пяти, задав не более трех вопросов?

Решение. 1) Буратино спрашивает про две любые монеты, заплатив третью. Если Кот утверждает, что среди монет нет фальшивой, то эти три монеты настоящие. Если же Кот утверждает, что среди монет есть фальшивая, то какая-то из этих трех монет фальшивая, а значит, две оставшиеся монеты настоящие. В любом случае из четырех монет, оставшихся у него, Буратино определит две настоящие.

2) Буратино отдает одну из известных ему настоящих монет Коту, а другую объединяет в пару с одной из неизвестных и показывает эту пару Коту. Ответ будет правдив, поэтому либо фальшивая монета в этой паре (и тогда Буратино ее определит), либо обе монеты настоящие, тогда фальшивой может быть либо третья его монета, либо первая монета, выплаченная Коту.

3) Буратино опять отдает настоящую монету Коту и спрашивает про две оставшиеся у него монеты. Ответ опять правдив, поэтому фальшивая монета однозначно определяется.

6. (*К. Кноп*) Четыре внешне одинаковые монетки весят 1, 2, 3 и 4 грамма. Можно ли за четыре взвешивания на чашечных весах без гирь узнать, какая из них сколько весит?

Ответ: можно.

Решение. Положим на чаши весов по две монеты и взвесим. Возможны два исхода: 1) одна из чаш перевесила; 2) равновесие.

1-й исход. На перевесившей, более тяжелой чаше лежат монеты 4 г и 2 г или 4 г и 3 г. Тогда на другой, более легкой — 1 г и 3 г или 1 г и 2 г.

Следующими двумя взвешиваниями сравним монеты на каждой чаше между собой и определим те, которые весят 1 г и 4 г. Четвертым взвешиванием сравним оставшиеся две монеты, определив, какая из них весит 2 г, а какая — 3 г.

2-й исход. На одной чаше лежат монеты 2 г и 3 г, а на другой — 1 г и 4 г. Следующими двумя взвешиваниями сравним монеты на каждой чаше между собой, а затем сравним две монеты, оказавшиеся более тяжелыми, определив, какая из них весит 4 г, а какая — 3 г. Сравнение двух монет, оказавшихся по результатам второго и третьего взвешиваний более легкими, происходит автоматически.

Комментарий. Отметим, что для выполнения алгоритма стандартной сортировки четырех объектов недостаточно четырех сравнений.

7. (*Д. Калинин*) В комнате стоит 20 стульев двух цветов: синего и красного. На каждый из стульев сел либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый из сидящих заявил, что он сидит на синем стуле. Затем они пересели, после чего половина из сидящих сказали, что сидят на синих стульях, а остальные сказали, что сидят на красных. Сколько рыцарей теперь сидят на красных стульях?

Ответ: 5.

Решение. Изначально все рыцари сидят на синих стульях, а все лжецы на красных. Значит, количество рыцарей, пересевших на красные стулья, равно количеству лжецов, пересевших на синие стулья. И те и другие сказали, что сидят на красных стульях. Всего сказавших, что сидят на красных стульях, десять. Значит, на красных стульях сидит 10 : 2 = 5 рыцарей.

8. (*А. Пешнин*) На Острове Рыцарей и Лжецов каждый дружит с десятью другими жителями (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут). Каждый житель заявил, что среди его друзей больше лжецов, чем рыцарей. Может ли количество рыцарей быть вдвое больше, чем количество лжецов?

Ответ: не может.

Решение. Пусть на острове живет x рыцарей и y лжецов, а количество пар друзей вида «рыцарь–лжец» равно D. Рыцари говорят правду, поэтому каждый из них входит хотя бы в шесть таких пар. Каждый лжец имеет не более 10 друзей-рыцарей, поэтому входит не более чем в 10 таких пар. Следовательно,

$$6x \le D \le 10y,\ x \le \frac{5y}{3} < 2y,$$

так как какие-то аборигены на острове есть (значит, обязательно есть и лжецы). Таким образом, рыцарей не может быть вдвое больше, чем лжецов.

Комментарий. Аналогичные рассуждения могут быть изложены на языке графов.

9. (*Д. Шноль*) Врун всегда лжет, Хитрец говорит правду или ложь, когда захочет, а Переменчик говорит то правду, то ложь попеременно. Путешественник встретил Вруна, Хитреца и Переменчика, которые знают друг друга. Сможет ли он, задавая им вопросы, выяснить, кто есть кто?

Ответ: сможет.

Решение. Спросим каждого из них по два раза: «Ты Врун?» Врун ответит: «Нет, нет», а Переменчик ответит либо «Да, нет», либо «Нет, да». Возможны три варианта ответов Хитреца:

1) Если Хитрец ответит «Да, да», то мы сразу узнаем, кто есть кто.

2) Если Хитрец ответит «Нет, нет», то мы узнаем, кто Переменчик и какой из двух его ответов правдив. Тогда зададим вопрос Переменчику, указав на одного из двух оставшихся: «Он Врун?» Так как мы уже знаем, ответит ли Переменчик правду на третий вопрос, то мы поймем, кто из двоих Врун, а, значит, кто из них Хитрец.

3) Если Хитрец ответит «Да, нет» или «Нет, да», то мы узнаем, кто Врун. Зададим вопрос Вруну, указав на одного из двух оставшихся: «Он Хитрец?» По его ответу мы узнаем, кто из двоих Хитрец, а, значит, кто из них Переменчик.

10. (*М. Евдокимов*) Вася задумал двузначное число и сообщил Пете произведение цифр в записи этого числа, а Саше — сумму этих цифр. Между мальчиками состоялся такой диалог:

Петя. Я угадаю задуманное число с трех попыток, но двух мне может не хватить.

Саша. Если так, то мне для этого хватит четырех попыток, но трех может не хватить.

Какое число было сообщено Саше?

Ответ: 10.

Решение. Пусть $\overline{ab}$ — задуманное двузначное число, тогда $P = ab$ — произведение его цифр. Так как Петя берется угадать задуманное число с трех попыток, то число P должно раскладываться на два множителя, которые являются цифрами, ровно тремя способами, учитывая порядок множителей. Следовательно:

1) $b \ge 0$ (иначе $P = 0 = a \cdot 0$ при любом a от 1 до 9, то есть указанных способов — девять);

2) для чисел $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$ значение P одно и то же, поэтому P должно быть квадратом какой-то из цифр (иначе P раскладывается указанным образом четным количеством способов).

Таким образом, достаточно рассмотреть квадраты всех цифр и выписать все способы их указанного разложения на множители:

$1 = 1 \cdot 1;$

$4 = 2 \cdot 2 = 1 \cdot 4 = 4 \cdot 1;$

$9 = 3 \cdot 3 = 1 \cdot 9 = 9 \cdot 1;$

$16 = 4 \cdot 4 = 2 \cdot 8 = 8 \cdot 2;$

$25 = 5 \cdot 5;$

$36 = 6 \cdot 6 = 4 \cdot 9 = 9 \cdot 4;$

$49 = 7 \cdot 7;$

$64 = 7 \cdot 7;$

$81 = 9 \cdot 9.$

Следовательно, из фразы Пети Саша может сделать вывод, что задуманным могло оказаться только одно из следующих чисел: 22, 14, 41, 33, 19, 91, 44, 28, 82, 66, 49, 94. Среди них:

одно число с суммой цифр 4 (22),

два числа с суммой цифр 5 (14 и 41),

одно число с суммой цифр 6 (33),

одно число с суммой цифр 8 (44),

четыре числа с суммой цифр 10 (19, 91, 28, 82),

одно число с суммой цифр 12 (66), два числа с суммой цифр 13 (49 и 94).

Так как Саше требуется 4 попытки на угадывание суммы, то искомая сумма равна 10.

Публикацию подготовил
С. РАМОДАНОВ,
г. Москва


ib-bank.ru

С задачами прошедших олимпиад и их решениями можно ознакомиться:
– на сайте v-olymp.ru;
– на сайте Академии ФСБ России www.academy.fsb.ru (раздел для абитуриентов);
– на сайте журнала «Квант» (раздел «Приложения. Математика»), www.kvant.info;
– также можно получить доступ к системе дистанционного обучения для подготовки к олимпиаде на сайте: www.v-olymp.ru.

XIX МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
НА БАЗЕ ВЕДОМСТВЕННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ

Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных организаций по математике проводится более 15 лет. Олимпиада организуется Институтом криптографии, связи и информатики Академии ФСБ России.

С 2008 года олимпиада ежегодно включается в перечень Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, что позволяет вузам при поступлении предоставлять льготы ее победителям и призерам.

Олимпиада проводится в два этапа. Первый — в дистанционной форме. В этом учебном году участие в нем приняли 2119 школьников из более чем 60 регионов Российской Федерации.

Заключительный этап олимпиады состоялся 9 февраля 2020 года. Возможность очного участия была обеспечена в 10 образовательных организациях ФСБ России в городах: Анапа, Екатеринбург, Калининград, Курган, Москва, Нижний Новгород, Новосибирск, Санкт-Петербург (Пушкин), Ставрополь, Хабаровск. В нем приняли участие 718 человек, из них 178 школьников невыпускных классов, что составляет около 25% от общего числа.

Задания олимпиады готовились для каждой возрастной категории (8–9-е, 10-е и 11-е классы) в нескольких равноценных вариантах. Проверка работ проводилась централизованно по единым критериям. Всего дипломами I, II, III степени награждены 102 участника.

Приведем условия и решения одной из задач каждого типа.

Условия и решения задач

1. (*9-й класс*) Расстояния от пункта A до пункта B по реке и по протоке одинаковы и равны 1 км. Скорость течения в протоке равна v км/ч, а в реке $(2v+1)$ км/ч. Течение и в реке, и в протоке направлено от A к B. Если к разности времен движения катера по протоке из B в A и обратно по протоке прибавить время движения плота по реке из A в B, то получится ровно 1 час. На сколько километров в час скорость катера больше скорости течения в протоке? Значение v не дано. В ответе должно получиться число.

Решение. Пусть $s = AB = 1$ км, u км/ч — собственная скорость катера, $v_1 = (2v+1)$ км/ч — скорость течения в реке, $T = 1$ ч — данное в задаче время.

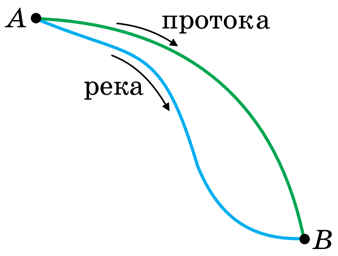


Рис. 1

По условию,

$$\frac{s}{u-v} - \frac{s}{u+v} + \frac{s}{v_1} = T.$$

Пусть $x = u - v$ — искомая разность. Тогда

$$\frac{s}{x} - \frac{s}{x+2v} + \frac{s}{v_1} = T.$$

Преобразовав, получим относительно x уравнение

$$(s - Tv_1)x^2 + 2v(s - Tv_1)x + 2sv_1v = 0.$$

Заметим, что

$$s - Tv_1 = -2sv \neq 0.$$

Значит, уравнение можно на эту величину поделить:

$$x^2 + 2vx - 2v - 1 = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет корни

$$x_1 = 1 \text{ и } x_2 = -2v - 1.$$

Корень x_2 отрицательный, поэтому

$$u - v = x_1 = 1.$$

Ответ: 1 км/ч.

2. (*9–11-е классы*) Восемь чисел:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4,$$

удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} a_1b_1 + a_2b_3 = 1, & \text{(а)} \\ a_1b_2 + a_2b_4 = 0, & \text{(б)} \\ a_3b_1 + a_4b_3 = 0, & \text{(в)} \\ a_3b_2 + a_4b_4 = 1. & \text{(г)} \end{cases}$$

Известно, что $a_2b_3 = 7$. Найдите a_4b_4.

Решение. Докажем, что

$$a_2b_3 = a_3b_2. \qquad (1)$$

Умножим уравнение (а) исходной системы на b_2 и вычтем из него уравнение (б), умноженное на b_1.

В результате получим:

$$a_2 \cdot \Delta = b_2. \qquad (2)$$

Здесь

$$\Delta = b_2b_3 - b_1b_4.$$

Аналогично из уравнений (в) и (г) находим, что

$$a_3 \cdot \Delta = b_3. \qquad (3)$$

Заметим, что $\Delta \neq 0$, так как в противном случае из (3) следовало бы, что $b_3 = 0$, а значит, и $a_2b_3 = 0$, что противоречит условию задачи.

Остается выразить a_2 и a_3 из равенств (2) и (3) и подставить полученные выражения в соотношение (1). Справедливость соотношения (1) будет тем самым доказана.

Далее из уравнения (г) и равенства (1) следует, что

$$a_4b_4 = 1 - a_3b_2 = 1 - a_2b_3 = -6.$$

Ответ: $a_4b_4 = -6$.

Комментарий. Система уравнений в задаче — это покомпонентная запись матричного равенства:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

и

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}.$$

Хорошо известно, что если произведение двух матриц равно единичной, то такие матрицы коммутируют, а значит, система уравнений в задаче останется справедливой, если в ней все a_i заменить на b_i и наоборот. Из этого наблюдения равенство (1) следует немедленно.

3. (*9–11-е классы*) Решите в целых числах уравнение

$$2^x + 2^y = 6^t.$$

Решение. Пусть сначала $x = y$. Исходное уравнение в этом случае примет вид

$$2^{x+1} = 6^t. \qquad (1)$$

Если $t > 0$, то правая часть (1) кратна трем, а левая — нет, поэтому уравнение не имеет корней. Значит, $t \leq 0$.

Если же предположить, что $t < 0$, то, переписав уравнение (1) в виде

$$2^{-x-1} = 6^{-t},$$

вновь придем к противоречию: кратное трем число 6^{-t} не может быть никакой степенью двойки. Поэтому $t = 0$ и $x = y = -1$.

Пусть теперь числа x и y различны. Можно считать, что $x < y$. Положим, что при $n \in N$

$$y = x + n. \qquad (2)$$

Исходное уравнение запишется в виде

$$2^x \cdot (1 + 2^n) = 6^t. \qquad (3)$$

Заметим, что $t \geq 0$. Действительно, из (3) следует, что

$$3^{-t} \cdot (1 + 2^n) = 2^{t-x}.$$

Если $t < 0$, то левая часть последнего равенства делится на 3, а правая — нет. Значит, $t \geq 0$. Но тогда и $x \geq 0$ (иначе, согласно (3), дробное число равнялось бы целому). Число 2 входит в канонические разложения на простые множители левой и правой частей (3) в одной и той же степени, поэтому

$$x = t. \qquad (4)$$

Сократив обе части (3) на 2^x и перенеся 1 в другую часть, получим:

$$2^n = 3^t - 1. \qquad (5)$$

Решим уравнение (5), предполагая n натуральным, а t — неотрицательным целым.

Пусть $n = 1$. Тогда $t = 1$. С учетом равенств (2) и (4) находим решение исходного уравнения:

$$x = 1,\ y = 2,\ t = 1.$$

Пусть $n > 1$. Тогда левая часть уравнения (5) кратна 4. Если t нечетно, то правая часть уравнения (5) на 4 не делится. Значит, $t = 2m$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $m \geq 0$. Из уравнения (5) следует, что

$$2^n = (3^m - 1)(3^m + 1).$$

Значит, числа $(3^m - 1)$ и $(3^m + 1)$ являются степенями двойки, на числовой оси они находятся друг от друга на расстоянии 2. Такое возможно, только если

$$3^m - 1 = 2 \text{ и } 3^m + 1 = 4.$$

Отсюда $m = 1$ и тогда $t = 2$, $n = 3$. Подставляя найденные значения в (2) и (4), получаем решение:

$$x = 2,\ y = 5,\ t = 2.$$

Ответ: (–1; –1; 0), (1; 2; 1), (2; 5; 2) (при условии $x \leq y$).

4. (*9-й класс*) Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность радиуса R. Известно, что

$$\angle B = 110°,\ \angle E = 100°.$$

Найдите сторону CD.

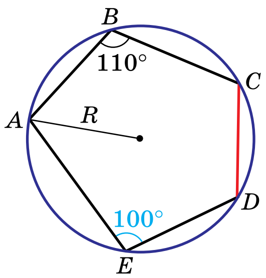


Рис. 2

Решение. Градусные меры дуг AD и CA равны соответственно

$$2 \cdot (180° - \angle E) \text{ и } 2 \cdot (180° - \angle B).$$

Сумма градусных мер дуг AD, CA и DC равна 360°. Значит, величина угла CAD, равная половине градусной меры дуги DC, определяется равенством

$$\angle CAD = \angle B + \angle E - 180° = 30°.$$

По формуле радиуса описанной около треугольника CAD окружности находим:

$$R = \frac{CD}{2 \cdot \sin \angle CAD} = CD.$$

Ответ: $CD = R$.

Комментарии

1. Отсюда следует, что сумма любых двух несмежных углов вписанного пятиугольника больше 180°.

2. Имеют место аналогичные формулы:

$$-2R = \frac{CD}{\sin(\angle B + \angle E)} = \ldots = \frac{BC}{\sin(\angle A + \angle D)}.$$

Оказывается, эти равенства выражают необходимое и достаточное условие того, что около данного пятиугольника можно описать окружность радиуса R.

5. (*9-й класс*) Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC. Найдите длину медианы, проведенной из вершины A, если

$$\angle BAC = 35°,\ \angle BOC = 145°,\ BC = a.$$

Решение. Обозначим длину искомой медианы AD за m (рис. 3). На прямой AD вне треугольника отметим такую точку F, что

$$OD = DF = \frac{m}{3}.$$

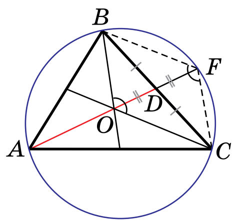


Рис. 3

Четырехугольник $OBFC$ — параллелограмм, так как его диагонали точкой пересечения делятся пополам. В параллелограмме противоположные углы равны, следовательно,

$$\angle CFB = \angle BOC. \qquad (1)$$

Поэтому в четырехугольнике $ABFC$ сумма противоположных углов BAC и CFB равна 180°. Значит, вокруг него можно описать окружность.

Известно, что если две хорды окружности, BC и AF, пересекаются в точке D, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды, то есть

$$BD \cdot DC = AD \cdot DF \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 = m \cdot \frac{m}{3}.$$

Отсюда

$$m = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

6. (*9–10-е классы*) Найдите площадь треугольника ABC, вершины которого имеют координаты $A(0;\ 0)$, $B(1\ 424\ 233;\ 2\ 848\ 467)$, $C(1\ 424\ 234;\ 2\ 848\ 469)$. Ответ округлите до сотых.

Решение. Заметим, что точки B и C лежат на прямой $y = 2x + 1$. Их абсциссы отличаются на 1, следовательно, $BC = \sqrt{5}$.

Длина высоты треугольника ABC, проведенной из вершины A, равна расстоянию h от точки A до прямой $y = 2x + 1$, которое, в свою очередь, равно $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Искомая площадь

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot BC = \frac{1}{2}.$$

Ответ: 0,5.

7. (*9–11-е классы*) Рассмотрим все возможные 100-значные натуральные числа, в десятичной записи которых встречаются только цифры 1 и 2. Сколько среди них делится на 3 нацело?

Решение. Каждое 100-значное натуральное число может быть получено дописыванием двух цифр справа к 98-значному числу. Пусть x — некоторое 98-значное число. Посмотрим, какие две цифры (каждая из которых равна 1 или 2) нужно приписать к числу x справа, чтобы получившееся 100-значное число делилось на 3.

Воспользуемся тем, что остаток от деления натурального числа на 3 равен остатку от деления на 3 суммы его цифр. Пусть наше число x при делении на 3 дает остаток m. Тогда:

– если $m = 0$, то припишем 12 или 21;

– если $m = 1$, то припишем 11;

– если $m = 2$, то припишем 22;

Таким образом, из каждого 98-значного числа, кратного 3, можно получить два 100-значных числа, кратных трем. Каждое некратное трем 98-значное число порождает только одно 100-значное число, кратное трем.

Всего 98-значных чисел 2^{98}. Пусть среди них A_{98} чисел кратно трем. (Далее символом A_n будем обозначать количество n-значных чисел, кратных трем.) Тогда количество 100-значных чисел, кратных трем, может быть найдено по формуле

$$A_{100} = 2A_{98} + (2^{98} - A_{98}) = 2^{98} + A_{98}.$$

Верны и следующие соотношения:

$$A_{100} = 2^{98} + A_{98},$$
$$A_{98} = 2^{96} + A_{96},$$
$$\ldots$$
$$A_6 = 2^4 + A_4,$$
$$A_4 = 2^2 + A_2.$$

Сложив эти равенства (величины A_4, ..., A_{98} при этом сокращаются), получим:

$$A_{100} = A_2 + 2^2 + 2^4 + \ldots + 2^{98}.$$

Остается заметить, что $A_2 = 2$, а остальные слагаемые образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 4. Тогда

$$A_{100} = 2 + \frac{4^{50} - 4}{3} = \frac{4^{50} + 2}{3}.$$

Ответ: $\frac{4^{50} + 2}{3}$.

8. (*9–10-е классы*) На декартовой плоскости рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат. Укажите хотя бы одно значение R, при котором на такой окружности лежит ровно 32 целочисленных точки. (Точку называют целочисленной, если ее абсцисса и ордината — целые числа.)

Указание. Натуральное число x представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел тогда и только тогда, когда все простые числа (кроме 2), входящие в разложение числа x в нечетной степени, имеют вид $(4k + 1)$ для некоторых целых k. В частности, в виде суммы двух квадратов представимо любое простое число, дающее остаток 1 при делении на 4. Если каждое из чисел a и b представимо в виде суммы двух квадратов, то это же верно и для их произведения.

Решение. Если каждое из чисел a и b представимо в виде суммы двух квадратов, то, как отмечено в указании, их произведение тоже представимо в таком виде. Более того, произведение, как правило, представимо в виде суммы двух квадратов бóльшим количеством способов, чем каждый из сомножителей. Например, число 5 в виде суммы двух квадратов неотрицательных чисел представимо единственным, с точностью до перестановки слагаемых, способом, а именно $5 = 2^2 + 1^2$; число 13 тоже только одним способом: $13 = 2^2 + 3^2$, а вот их произведение уже двумя:

$$65 = 5 \cdot 13 = 4^2 + 7^2 = 1^2 + 8^2.$$

Добавив еще один простой множитель, дающий остаток 1 при делении на 4, получим четыре способа:

$$1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17 =$$
$$= 4^2 + 33^2 = 9^2 + 32^2 =$$
$$= 12^2 + 31^2 = 23^2 + 24^2.$$

Значит, на окружности радиуса $R = \sqrt{1105}$ в первой четверти лежит восемь целочисленных точек:

$$(4;\ 33),\ (33;\ 4),\ (9;\ 32),$$
$$(32;\ 9),\ (12;\ 31),\ (31;\ 12),$$
$$(23;\ 24),\ (24;\ 23).$$

Следовательно, всего на этой окружности лежит 32 целочисленных точки.

Ответ: например, $\sqrt{1105}$.

Комментарий. Эффект увеличения числа способов принято объяснять, используя комплексные числа. Заметим, что

$$5 = (2 + i)(2 - i) = 2^2 + 1^2.$$

Число 5 равно сумме двух квадратов, так как оно представимо в виде произведения двух сопряженных комплексных (гауссовых) чисел. Аналогично

$$13 = (2 + 3i)(2 - 3i) = 2^2 + 3^2.$$

В то же время число $65 = 5 \cdot 13$ в виде произведения двух комплексно-сопряженных множителей представимо двумя способами:

$$5 \cdot 13 =$$
$$= (2 + 3i)(2 + i) \cdot (2 - 3i)(2 - i) =$$
$$= (1 + 8i) \cdot (1 - 8i) = 1^2 + 8^2$$

или

$$5 \cdot 13 =$$
$$= (2 - 3i)(2 + i) \cdot (2 + 3i)(2 - i) =$$
$$= (7 + 4i) \cdot (7 - 4i) = 7^2 + 4^2.$$

9. (*10-й класс*) Решите уравнение

$$\sin^3 x + 6\cos^3 x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Решение. Преобразуем уравнение:
$\sin^3 x + \sin x \cos x (\sin x + \cos x) + 6\cos^3 x = 0,$
$\sin^3 x + \sin^2 x \cos x + \sin x \cos^2 x + 6\cos^3 x = 0.$

Если $\cos x = 0$, то, подставляя это значение в уравнение, получим $\sin x = 0$, чего быть не может. Тогда, разделив каждый член уравнения на $\cos^3 x$, получим равносильное уравнение

$$\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 6 = 0.$$

Заменив $\operatorname{tg} x$ на y, придем к уравнению:

$$y^3 + y^2 + y + 6 = 0,$$
$$(y + 2)(y^2 - y + 3) = 0,$$
$$y = -2.$$

$\operatorname{tg} x = -2$, откуда $x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

Ответ: $x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

10. (*10-й класс*) В вершинах квадрата со стороной 4 расположены четыре города. Эти города надо соединить дорогами так, чтобы из любого города можно было по ним добраться в любой. Предложите хоть один вариант таких дорог, общей длиной *менее* 11.

Указание. При решении задачи может оказаться полезным следующее утверждение, которое допустимо использовать без доказательства.

Пусть внутренние углы треугольника ABC меньше 120°. Сумма расстояний $AT + BT + CT$ от точки T до вершин треугольника минимальна, если из точки T стороны треугольника видны под углом 120° (T — точка Торричелли треугольника). Если же один из углов треугольника больше или равен 120°, то точкой минимума суммы расстояний будет вершина этого угла.

Решение. Предположим, что у нашей системы дорог перекрестков нет, то есть имеется одна дорога, соединяющая последовательно вершины квадрата E, F, G и H (рис. 4).

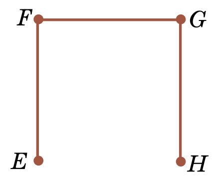


Рис. 4

Тогда ее длина будет не меньше трех сторон квадрата, то есть не меньше 12 (дорога, соединяющая соседние вершины квадрата не меньше его стороны). Значит, искомая (а в идеале — кратчайшая) система дорог должна иметь перекрестки (например, как на рис. 5).

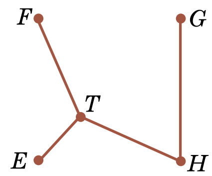


Рис. 5

Чтобы понять, каким образом можно эффективно уменьшать общую длину дорог, обратим внимание на свойства, которыми обязана обладать *кратчайшая система дорог*.

(I) Кратчайшая система дорог состоит из отрезков, соединяющих перекрестки и вершины квадрата. Это очевидно, поскольку кратчайшим путем из одной точки в другую является отрезок прямой. Отметим без доказательства, хотя и это почти очевидно, что для любой системы городов кратчайшая система дорог, их соединяющая, — это связный граф без замкнутых путей, ребрами которого служат отрезки.

(II) Каждый перекресток должен быть соединен минимум с тремя вершинами графа (вершинами квадрата или перекрестками). Если он соединен только с двумя, то смысла в нем немного: его можно удалить, а эти две вершины соединить напрямую; получится короче.

(III) Угол между любыми двумя дорогами, выходящими из одного перекрестка (или из одной вершины квадрата), не может быть меньше 120°. Действительно, пусть из точки A выходят дороги AB и AC и угол BAC меньше 120°. Тогда дороги AB и AC можно заменить дорогами с меньшей суммарной длиной. Если в треугольнике ABC все внутренние углы меньше 120°, то дороги AB и AC заменим на дороги TA, TB и TC, где T — точка Торричелли треугольника ABC (рис. 6).

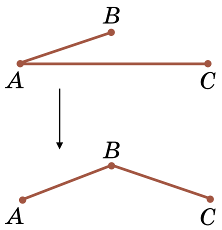


Рис. 6

Если же, например, угол B больше $120°$, то AB и AC заменим на AB и BC (рис. 7).

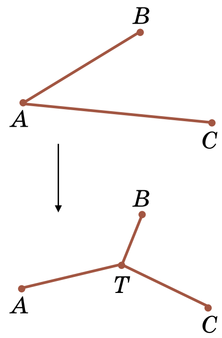


Рис. 7

(IV) Из одного перекрестка выходят ровно три дороги под углами $120°$ (иначе длина дорог может быть уменьшена). Это немедленно следует из свойств (II) и (III).

Предположим, что система дорог обладает одним перекрестком. Если он соединен со всеми вершинами (рис. 8), то длина дорог не меньше суммы диагоналей, которая равна $8\sqrt{2} > 11$.

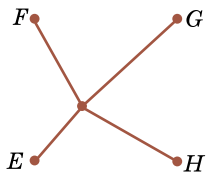


Рис. 8

Если же он соединен только с тремя вершинами (см. рис. 5), то T — точка Торричелли треугольника EFH, вершина G соединена с F. В этом случае длина дорог приблизительно равна 11,7. Более того, нарушено свойство (III), так как $\angle THG < 120°$, а значит, длину дорог можно уменьшить, добавив еще один перекресток (как в случае на рис. 6).

Пусть перекрестков два. Из соображений симметрии расположим их на оси симметрии квадрата, параллельной двум его сторонам (рис. 9), так, чтобы из каждого перекрестка дороги выходили под углом $120°$ (свойство (IV)). В этом случае суммарная длина дорог равна

$$4\cdot\left(\sqrt{3}+1\right) < 10{,}92.$$

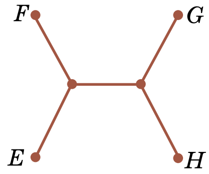


Рис. 9

Ответ: например, см. рис. 9. Из каждого перекрестка дороги выходят под углом $120°$. Их суммарная длина равна $4\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)$, что меньше 11.

Комментарий. Система дорог на рисунке 9 называется сетью Штейнера данных четырех точек — вершин квадрата: E, F, G и H. Без доказательства отметим, что эта система имеет минимальную длину из всех возможных.

11. (*10-й класс*) В остроугольном треугольнике ABC на стороне AC выбрана точка Q так, что

$$AQ : QC = 1 : 2.$$

Из точки Q опущены перпендикуляры QM и QK на стороны AB и BC соответственно. При этом

$$BM : MA = 4 : 1,\ BK = KC.$$

Найдите отношение $MK : AC$.

Решение. Проведем высоты AK_1 и CM_1 (рис. 10).

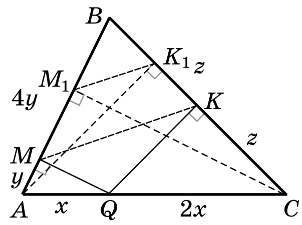


Рис. 10

Идея решения в следующем: покажем, что треугольники M_1BK_1, MBK и ABC подобны друг другу; отсюда найдем требуемое отношение.

Обозначим длины:

$$AQ = x,\ QC = 2x,\ CK = z,$$
$$KB = z,\ BM = 4y,\ MA = y.$$

Из подобия треугольников AK_1C и QKC находим:

$$KK_1 = KC\cdot\frac{AQ}{QC} = \frac{z}{2}.$$

Аналогично, так как треугольники AQM и ACM_1 подобны:

$$MM_1 = QC\cdot\frac{AM}{AQ} = 2y.$$

Таким образом, так как
$$BK_1 = KK_1 \text{ и } MM_1 = M_1B,$$
треугольники M_1BK_1 и MBK подобны с коэффициентом подобия 2 (их общий угол лежит между пропорциональными сторонами).

Хорошо известно, что треугольник, образованный двумя основаниями высот и вершиной, подобен исходному, а именно треугольники M_1BK_1 и ABC подобны с коэффициентом подобия $\cos\angle B$. Значит,
$$M_1K_1 : AC = \cos\angle B,$$
тогда
$$MK : AC = 2\cos\angle B. \qquad (1)$$

Остается вычислить $\cos\angle B$. Площади подобных треугольников M_1BK_1 и ABC относятся как квадрат коэффициента подобия:
$$\frac{BM_1\cdot BK_1}{BA\cdot BC} = \frac{2y\cdot\frac{z}{2}}{5y\cdot 2z} = \cos^2\angle B.$$

Отсюда
$$\cos\angle B = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Подставив найденное значение в соотношение (1), получаем ответ.

Ответ: $\dfrac{2}{\sqrt{10}}$.

12. (*11-й класс*) Решите неравенство
$$2^{\log_2^2 x} - 12\cdot x^{\log_{0,5} x} < 3 - \log_{3-x}\left(x^2 - 6x + 9\right).$$

Решение.
$$2^{\log_2^2 x} - 12\cdot x^{\log_{0,5} x} < 3 - \log_{3-x}\left(x^2 - 6x + 9\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^{\log_2 x} - 12\cdot x^{-\log_2 x} < 3 - \log_{3-x}(3-x)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^{\log_2 x} - 12\cdot x^{-\log_2 x} < 1, & (1) \\ x < 3,\ x \ne 2. & (2) \end{cases}$$

Решим неравенство (1) системы. Обозначим $x^{\log_2 x} = y,\ y > 0$. Тогда
$$\Leftrightarrow y - \frac{12}{y} < 1 \Leftrightarrow \frac{(y+3)(y-4)}{y} < 0.$$

Так как $y > 0$, то $y \in (0; 4)$. Отсюда
$$x^{\log_2 x} < 4 \Leftrightarrow \log_2^2 x < 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\sqrt{2} < \log_2 x < \sqrt{2} \Leftrightarrow 2^{-\sqrt{2}} < x < 2^{\sqrt{2}}$$
— это ответ для неравенства (1) нашей системы.

Теперь учтем ограничения (2). Для этого сравним числа $2^{\sqrt{2}}$ и 3. Заметим, что
$$2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5} \text{ и } 2^{1,5} < 3,$$
так как
$$8 = (2^{1,5})^2 < 3^2 = 9.$$

Поэтому $2^{\sqrt{2}} < 3$. И наконец запишем ответ с учетом ограничений (2).

Ответ: $x \in \left(2^{-\sqrt{2}}; 2\right) \cup \left(2; 2^{\sqrt{2}}\right)$.

13. (*11-й класс*) Решите уравнение
$$\sqrt{\frac{2t}{1+t^2}} + \sqrt[3]{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 1.$$

Решение. Сделаем замену:
$$t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},\ \alpha \in (-\pi; \pi). \qquad (1)$$

Тогда $\dfrac{2t}{1+t^2} = \sin\alpha,\ \dfrac{1-t^2}{1+t^2} = \cos\alpha$; исходное уравнение примет вид
$$\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt[3]{\cos\alpha} = 1. \qquad (2)$$

Если $\cos\alpha < 0$, то левая часть уравнения (2) строго меньше 1 — корней нет. В случае же, когда $\cos\alpha \ge 0$ и $\sin\alpha \ge 0$, имеем очевидное неравенство
$$\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt[3]{\cos\alpha} \ge \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Причем равенство достигается, только когда или $\cos\alpha = 1$, или $\sin\alpha = 1$. Значит либо $\alpha = 0$, либо $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

Подставив найденные значения α в соотношение (1), найдем искомое t.

Ответ: $t \in \{0; 1\}$.

14. (*11-й класс*) Основанием пирамиды $TABCD$ является трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Расстояния от точек A и B до плоскости TCD равны r_1 и r_2 соответственно. Площадь треугольника TCD равна S. Найдите объем пирамиды $TABCD$.

Решение. Объем пирамиды $TABCD$ равен сумме объемов пирамид $TBCD$ и $TABD$.

$V_{TABD} = V_{TACD}$, так как у пирамид $TABD$ и $TACD$ общая высота (из вершины T), а также равны площади их оснований.

$S_{ABD} = S_{ACD}$, так как эти треугольники имеют общую сторону AD, а высоты, проведенные из вершин B и C, равны, поскольку $ABCD$ — трапеция (рис. 11). Итак,
$$V_{TABCD} = V_{TBCD} + V_{TACD} = \frac{1}{3}\cdot S\cdot r_2 + \frac{1}{3}\cdot S\cdot r_1.$$

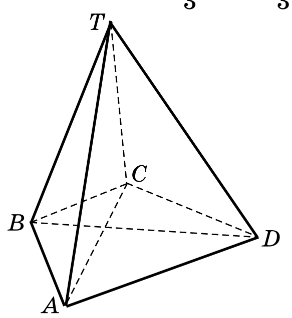


Рис. 11

Ответ: $\dfrac{S(r_1 + r_2)}{3}$.

15. (*11-й класс*) Дан треугольник ABC. На стороне AC выбирают точку Q таким образом, чтобы длина отрезка MK, где M и K — основания перпендикуляров, опущенных из точки Q на стороны AB и AC соответственно, оказалась минимальной. При этом $QM = 1$, $QK = \sqrt{2}$, $\angle B = 45°$. Найдите площадь треугольника ABC.

Решение. Длины перпендикуляров, опущенных из точки Q основания AC, обозначим как d_1 и d_2; пусть $\angle B = \beta$. Четырехугольник $MBKQ$ вписан в окружность, а BQ — ее диаметр. По формуле для радиуса описанной около треугольника MBK окружности имеем:

$$BQ = \frac{MK}{\sin\beta} \Rightarrow MK = BQ \cdot \sin\beta. \qquad (1)$$

Поскольку величина угла β фиксирована, длина отрезка MK тем меньше, чем меньше длина BQ. Значит, точка Q — это основание перпендикуляра, опущенного из точки B на AC, а BQ — высота. (Основание перпендикуляра Q лежит именно на стороне AC, а не на ее продолжении, так как углы A и C острые; если бы, скажем, угол A был тупым, то точка M оказалась бы на продолжении стороны AB, а не на ней самой.) Положим $BQ = h$. Найдем площадь треугольника ABQ, считая h известной величиной.

Имеем:

$$AQ = \frac{h}{\sin\angle A} = \frac{h}{\sqrt{1-\frac{d_1^2}{h^2}}}.$$

Тогда

$$S_{ABQ} = \frac{h^4}{2\sqrt{h^2-d_1^2}}.$$

Аналогично

$$S_{BQC} = \frac{h^4}{2\sqrt{h^2-d_2^2}}.$$

Искомая площадь равна их сумме:

$$S_{ABC} = S_{ABQ} + S_{BQC} = \frac{h^4}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{h^2-d_1^2}} + \frac{1}{\sqrt{h^2-d_2^2}}\right). \qquad (2)$$

Остается найти h. Так как $h = BQ$, то из (1) следует, что

$$h = \frac{MK}{\sin\beta}.$$

Найдем MK из треугольника MQK (в нем $\angle MQK = 180° - \beta$) по теореме косинусов:

$$MK^2 = d_1^2 + d_2^2 + 2d_1d_2\cos\beta.$$

Итак,

$$h = \frac{MK}{\sin\beta} = \frac{\sqrt{d_1^2+d_2^2+2d_1d_2\cos\beta}}{\sin\beta}.$$

Чтобы воспользоваться (2), для удобства вычислим:

$$h^2 - d_1^2 = \frac{d_1^2+d_2^2+2d_1d_2\cos\beta - d_1^2\sin^2\beta}{\sin^2\beta} = \frac{(d_1\cos\beta + d_2)^2}{\sin^2\beta}.$$

Аналогично

$$h^2 - d_2^2 = \frac{(d_2\cos\beta + d_1)^2}{\sin^2\beta}.$$

Подставив полученные выражения в (2), находим:

$$S_{ABC} = \frac{(d_1^2+d_2^2+2d_1d_2\cos\beta)^2}{2(d_1\cos\beta+d_2)(d_2\cos\beta+d_1)\sin\beta}.$$

Теперь, используя числовые данные задачи, получаем ответ.

Ответ: $\frac{25}{6}$.

16. (*11-й класс*) Найдите все неотрицательные целые числа a и b, удовлетворяющие равенству

$$a^2 + b^2 = 841 \cdot (ab + 1).$$

Решение. Пусть пара чисел $(a; b)$ удовлетворяет уравнению задачи:

$$a^2 + b^2 = k^2(ab + 1),\ k = 29. \qquad (1)$$

Предположим, что одно из чисел, например a, равно нулю. Тогда, очевидно, $b = k$. Поэтому далее будем рассматривать такие решения $(a; b)$ уравнения (1), для которых

$$a \neq 0,\ b \neq 0. \qquad (2)$$

Более того, будем предполагать, что

$$a \le b. \qquad (3)$$

Итак, пусть пара $(a_0; b_0)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3). Из (1) находим, что

$$b_0^2 - k^2a_0b_0 + a_0^2 - k^2 = 0.$$

Это равенство можно трактовать как квадратное уравнение относительно неизвестной b_0. По теореме Виета, помимо b_0, это уравнение еще имеет корень b_0' такой, что

$$b_0 + b_0' = k^2a_0, \qquad (4)$$

$$b_0b_0' = a_0^2 - k^2. \qquad (5)$$

Утверждение. Этот новый корень b_0' удовлетворяет условиям:

$$b_0' \ge 0,\ b_0' \in \mathbf{Z},\ b_0' < a_0.$$

Доказательство. Числа a_0 и b_0' удовлетворяют (1), поэтому $b_0' \ge 0$ (иначе правая часть (1) была бы отрицательной, так как, по условию задачи и в силу (2), $a_0 > 0$). Из (4) следует, что неотрицательное b_0' является целым, а из (5) — что $b_0' = \frac{a_0^2 - k^2}{b_0}$. Установим, что $b_0' < a_0$. Действительно,

$$b_0' < a_0 \Leftrightarrow \frac{a_0^2-k^2}{b_0} < a_0 \Leftrightarrow a_0^2 - k^2 < a_0b_0 \Leftarrow a_0^2 \le a_0b_0.$$

Последнее верно в силу (3).

Таким образом, пара $(a_0; b_0)$, удовлетворяющая уравнению (1) и ограничениям (2), (3), порождает новую пару (см. (4)) вида

$$(b_0'; a_0) = (k^2 a_0 - b_0; a_0),$$

которая также удовлетворяет (1)–(3) (если, конечно, $a_0 \neq k$; так как, согласно (5), еще может быть найден по формуле $b_0' = \frac{a_0^2 - k^2}{b_0}$, так что, если $a_0 = k$, то (3) не будет выполнено). Будем эту новую пару обозначать как $(a_1; b_1)$. Затем по тем же формулам можно из пары $(a_1; b_1)$ получить решение $(a_2; b_2)$ и т.д. Символически полученный результат представим следующим образом:

$$(a_0; b_0) \to (a_1; b_1) = (k^2 a_0 - b_0; a_0) \to \to (a_2; b_2) \to \ldots \quad (6)$$

Здесь

$$a_m = k^2 a_{m-1} - b_{m-1},\ b_m = a_{m-1},$$

при этом (см. утверждение)

$$a_m > a_{m-1}. \quad (7)$$

Сразу же отметим и формулы обратного преобразования, с помощью которых цепочку (6) можно продолжить влево:

$$a_{m-1} = b_m,\ b_{m-1} = k^2 b_m - a_m. \quad (7')$$

С помощью правила (7) из одного решения $(a_0; b_0)$, удовлетворяющего условиям (1)–(3), мы можем получить лишь конечное число новых решений уравнения (1), так как согласно доказанному утверждению

$$a_0 > a_1 > a_2 > \ldots \geq 0.$$

Значит, на каком-то шаге обязательно получится $a_n = 0$. Тогда, как было показано выше, $b_n = k$.

Чтобы на n-м шаге получить 0, на предыдущем шаге должно быть $a_{n-1} = k$. Подставив $a = a_{n-1} = k$ в (1), найдем $b = b_{n-1} = k^3$.

Таким образом, окончание цепочки (6) выглядит так:

$$\ldots \to (a_{n-1}; b_{n-1}) = (k; k^3) \to (a_n; b_n) = (0; k). \quad (8)$$

Цепочку (8) продолжать вправо не имеет смысла, так как далее

$$(0; k) \to (-k; 0) \to (0; k) \to \ldots$$

А вот что предшествует паре $(a_{n-1}; b_{n-1}) = (k; k^3)$? Согласно (7′), на предыдущем шаге $a_{n-2} = k^3$, $b_{n-2} = k^5 - k$ — и это тоже решение уравнения (1)! Можно продолжить, получая новые решения:

$$a_{n-2} = k^5 - k,\ b_{n-2} = k^7 - 2k^3$$

и так далее. Значит, всего решений у уравнения (1) бесконечно много, так как цепочку (8) можно продолжить влево сколь угодно далеко.

Поясним, почему (8) содержит *все* решения (1), удовлетворяющие условию (3).

Пусть $(a^*; b^*)$ — какое-то (удовлетворяющее (3)) решение уравнения (1). Было показано, что с помощью формул (7) из решения $(a^*; b^*)$ можно получить цепочку новых решений (см. (6)), которая непременно закончится решением $(0; k)$. Но это и означает, что $(a^*; b^*)$ содержится в (8), ведь, приняв теперь решение $(0; k)$ за отправную точку, мы с помощью обратных преобразований (7′) вернемся к $(a^*; b^*)$ (а цепочка (8) именно так и устроена: начав с $(0; k)$, мы с помощью (7′) получаем ее всю).

Чтобы записать ответ, несколько поменяем нумерацию: положим $(a_0; b_0) = (0; k)$ и двинемся с помощью (7′) по цепочке (8) влево (у нас будет $(a_1; b_1) = (k; k^3)$, $(a_2; b_2) = (k^3; k^5 - k)$ и т.д.).

Ответ: решениями $(a; b)$ (при условии $a \leq b$) служат те и только те пары чисел $(a_n; b_n)$, которые при каждом $n \in \mathbf{N}$ вычисляются по формулам: $a_n = b_{n-1}$, $b_n = k^2 b_{n-1} - a_{n-1}$, $a_0 = 0$, $k_0 = k$; здесь $k = 29$.

КАК СТАТЬ АВТОРОМ ЖУРНАЛА «МАТЕМАТИКА»?

Сделать это несложно: надо лишь написать статью и прислать ее в редакцию журнала. И еще одно условие — она должна быть интересна и полезна вашим коллегам. Требования к оформлению статьи:

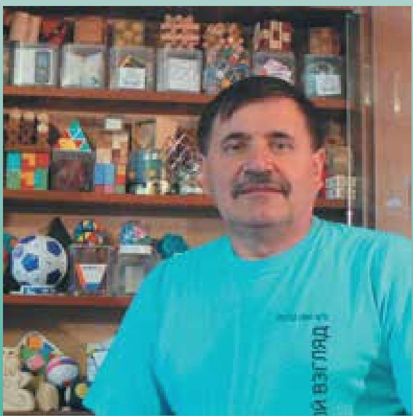
- Материал должен быть напечатан на компьютере или на пишущей машинке.
- Рисунки должны быть четкими, аккуратными, выполненными на белой нелинованной или клетчатой бумаге с помощью чертежных инструментов. Если вы хорошо владеете компьютером, можете воспользоваться для этого программой Corel Draw.
- Рисунки надо пронумеровать, нумерация должна соответствовать их нумерации в тексте.
- Фотографии должны быть цветными. Формат фотографий, отпечатанных на бумаге, не менее 10 × 15 см. Размер цифровых фотографий не менее 800 × 600 пикселей, формат JPG, качество, используемое при сохранении JPG-файлов, высокое (high).

Прислать статью можно по почте или по электронной почте. Всю необходимую для этого информацию вы найдете на странице 2 журнала.

Н. АВИЛОВ,
avilow@rambler.ru,
ст. Егорлыкская, Ростовская обл.

КВАДРИГАМИ

Обзор игры «Квадригами» можно посмотреть здесь: youtube.com/watch?v=LQd2tpeb2hk



Ведущий рубрики — Николай Авилов — на фоне своей коллекции головоломок

Обложка 100-листового блокнота «Квадригами»

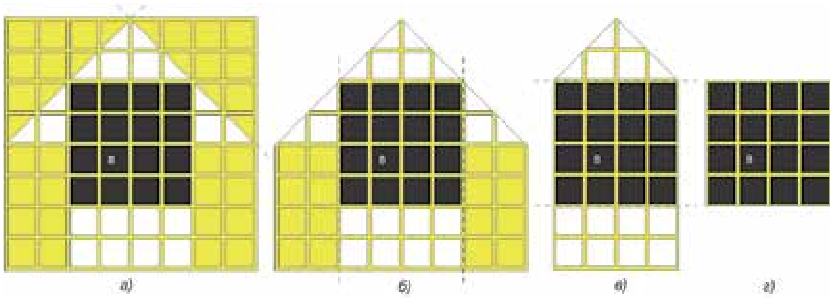
Если вы любите геометрические головоломки, то специально для вас Жером Морен-Друен придумал игру «Квадригами». В ее основе лежит оригами — древнее японское искусство складывания фигурок из бумаги.

Игра представляет собой отрывной блокнот, в котором 100 квадратных листов размером 8 × 8 клеток. Каждый квадрат раскрашен разноцветными геометрическими узорами, напоминающими узоры калейдоскопа. Но среди фигур, из которых складываются эти узоры, обязательно есть черные и белые, именно они играют главную роль в этой головоломке. На любом листке суммарная площадь всех черных фигур и суммарная площадь всех белых фигур одинакова и равна 16.

Задача играющего, сгибая листок подходящим образом, сложить его в многослойный квадрат 4 × 4 так, чтобы одна сторона квадрата состояла из 16 белых клеток, а другая — из 16 черных. Правила просты: перегибать бумагу можно тремя способами — по горизонтали, по вертикали или вдоль диагоналей исходного листка. Резать или рвать выбранный бумажный квадрат запрещено.

Листки блокнота пронумерованы, номер страницы — это номер очередной головоломки, страниц всего 100, значит, мы имеем 100 головоломок различной степени трудности. Для градации заданий по трудности блокнот разделен на пять уровней. Задания расположены по принципу «от простого к сложному». В желтом уровне — задания 1–20, в розовом — 21–40, в оранжевом — 41–60, в зеленом — 61–80, в красном — задания 81–100. То есть́ играющие могут обучаться этому искусству постепенно.

Покажем на примере листка № 8 (рис. *а*), как решается головоломка.



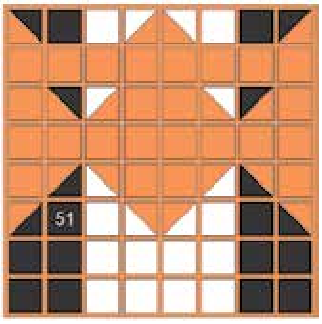
Двумя косыми сгибами по штриховым линиям завернем на обратную сторону листка два желтых треугольника; результат этих

Есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

действий показан на рисунке *б*. Двумя вертикальными сгибами завернем на обратную сторону желто-белые трапеции; результат — на рисунке *в*. Двумя горизонтальными сгибами завернем на обратную сторону белый треугольник сверху и белый прямоугольник снизу.

На рисунке *г* получен черный квадрат, но он многослоен, его обратная, белая сторона составлена из трех треугольников и одного прямоугольника.

Не думайте, что все так просто решается! Ведь мы рассмотрели головоломку первого уровня, трудности еще впереди, и вам непременно придется поднапрячься! Какой же номер головоломки вам предложить для самостоятельного решения? Попробуйте, например, листок с № 51, находящийся в середине блокнота. Его разноцветная мозаика представлена на рисунке.

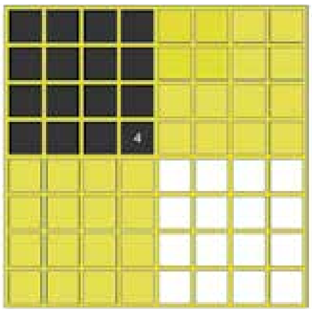


Головоломка № 51

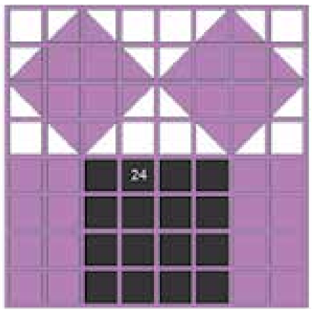
Надо сказать, что решение придется придумывать самостоятельно, подсмотреть некуда, так как решений головоломок в блокноте нет. В правой колонке показаны еще шесть избранных головоломок из блокнота «Квадригами» разных уровней сложности для самостоятельного решения.

Игра рассчитана на одного играющего, но можно организовать соревнования. Выдайте участникам различные задания одного уровня сложности, и победит тот, кто быстрее решит головоломку. Для распечатки заданий можно воспользоваться принтером.

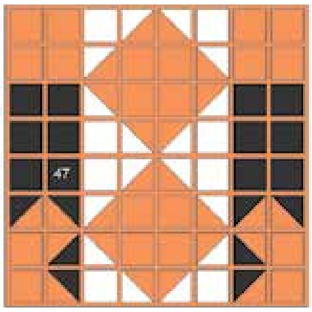
Совсем недавно появилась вторая версия головоломки — «Квадригами-2», на листках которой игровое поле больше, оно имеет размер 9×9, значит, возможностей, разнообразия и интереса тоже больше.



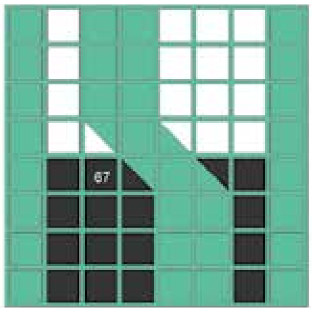
Головоломка № 4



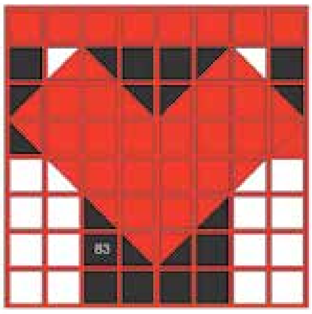
Головоломка № 24



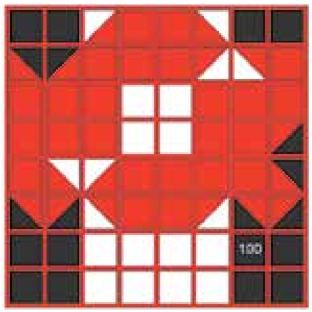
Головоломка № 47



Головоломка № 57



Головоломка № 53



Головоломка № 100

В России головоломку «Квадригами» распространяет компания «Стиль Жизни». Это российское издательство, специализирующееся на производстве и продаже настольных игр. Представляя головоломку, специалисты компании утверждают, что если человек начинает складывать, то он уже не может остановиться, ему хочется решать новые варианты головоломки снова и снова.

Удачи в решении! Надеюсь, что вам понравится наводить порядок в этом разноцветном хаосе!

ЗВЕЗДА ДАВИДА

Звезда Давида с точки зрения математики — гексаграмма, в которой два одинаковых равносторонних треугольника (один вершиной вверх, другой — вершиной вниз) наложены друг на друга, образуя шесть равных треугольников, присоединенных к сторонам правильного шестиугольника.

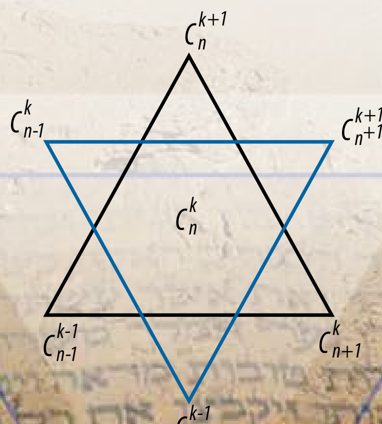
Звезда Давида — символ древнего происхождения. В Индии он был известен еще до того, как попал на Ближний Восток, использовался в декоративных и магических целях кельтами.

Легенда связывает гексаграмму с формой щита царя Давида. Наиболее раннее ее изображение обнаружено на печати VII ве-ка до н.э. С XIX века звезда Давида считается еврейским символом, она изображается на флаге Государства Израиль. Существует множество трактовок: 2 треугольника — соединение небесного и земного, 6 углов — шесть дней творения, 12 ребер — 12 колен Израилевых.

Не так давно (в 1972 г.) появилась теорема, носящая название «Звезда Давида».

Теорема (Звезда Давида). Наибольший общий делитель чисел $C_n^{k-1}, C_{n-1}^{k}, C_{n+1}^{k+1}$ равен наибольшему общему делителю чисел $C_n^{k+1}, C_{n+1}^{k}, C_{n-1}^{k-1}$.

Чтобы понять, почему эта теорема называется звездой Давида, просто посмотрите на рисунок.



ISSN 2658-4042
9 772658 404196
20006